A LOGIKA ELEMEI

Bóta László

MÉDIAINFORMATIKAI KIADVÁNYOK

A LOGIKA ELEMEI

Bóta László

Eger, 2011

Lektorálta:

CleverBoard Interaktív Eszközöket és Megoldásokat Forgalmazó és Szolgáltató Kft.

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Felelős kiadó: dr. Kis-Tóth Lajos
Készült: az Eszterházy Károly Főiskola nyomdájában, Egerben
Vezető: Kérészy László
Műszaki szerkesztő: Nagy Sándorné

Kurzusmegosztás elvén (OCW) alapuló informatikai curriculum és SCORM kompatibilis tananyagfejlesztés Informatikus könyvtáros BA, MA lineáris képzésszerkezetben
TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0005

Tartalom

1. BEVEZETÉS

A jegyzet a mai modern szemléletű logika alapjait taglalja szabatos matematikai megközelítéssel, tekintettel az informatikus könyvtáros szakos hallgatók igényeire.

1.1 CÉLKITŰZÉS

A szimbolikus logika és a matematikai logika kapcsolatának megértetése. A matematikai logika alapvető fogalmi rendszerének, jelölésének, összefüggéseinek bizonyításra törő megértetése. Cél továbbá a tananyaggal számos tanegység feldolgozásának elősegítése, melyek támaszkodnak a szimbolikus logika elemeire.

1.2 A KURZUS TARTALMA

1. A logika története, tárgya
2. Alapfogalmak
3. Logikai műveletek
4. A halmazelmélet
5. A kijelentéslogika
6. A kijelentéslogika alkalmazásai
7. A predikátumlogika elemei
8. Prédikátumlogikai következtetések
9. A leckék feladatainak megoldása
10. Gyakorló feladatok és megoldásuk

1.3 A KURZUS TÖMÖR KIFEJTÉSE

A jegyzetben bemutatjuk a matematikai logika, ezen belül a kijelentéslogika és a predikátumlogika alapvető fogalmait. A kijelentés- és a predikátumkalkulus számára viszonylag könnyen lehet következtetési szabályokat megadni, amelyek megengedik a szokásos tartalmi következtetés szigorú formulázását, de messzemenően megengedtünk olyan bizonyításokat is, amelyeket csupán a tartalom vezérli, azaz nem formalizáltak. A tárgyalt tananyag matematikai módszereket, jelöléseket alkalmaz, de nem jut el az axiomatikus tárgyalás mélyebb szintjére. A tananyag mélységénél és a bizonyításoknál figyelembe vettük a szak sajátosságait, a szakmai hasznosságot és a vizualitást, különös tekintettel az elvonatkoztatott logikai bizonyítások esetén. A formális logika elemeinek alapjain túl az olvasó más tárgyak esetén továbbépítkezhet, de ott már nem biztos, hogy a szabatos tárgyalás lesz szükséges.

A feldolgozandó anyag tárgyalása során számtalan példa segíti a megértést, a leckék feladatai igyekeznek átültetni a tanultakat a gyakorlatba. A példák megoldása minden esetben a tananyag szövegében, a példa után, míg a leckék feladatainak megoldása egy külön leckében található. A leckékhez kapcsolódva még egy újabb, összefoglaló feladatsor is rendelkezésre áll az utolsó leckében, melynek a megoldása a feladatsor után megtekinthető.

1.4 KOMPETENCIÁK ÉS KÖVETELMÉNYEK

A könyvtáros számára hasznos a logika elemeinek ismerete. Segítséget nyújt a tájékoztató munkához szükséges tudásanyag strukturálásában, a rejtett információk következtetések révén való feltárásában, a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében, a szabatos és egyértelmű kommunikálás képességének kialakításában.

A tananyag elsajátítása után a hallgató képes a matematikai logika alapozó elemeit matematikai szabatossággal megfogalmazni, a tételeket önállóan, igényesen belátni, az elméleti ismereteket a gyakorlatban alkalmazni. A logika elmei képessé teszik arra, hogy a későbbiekben az internetes keresőrendszerek valamint a könyvtári rendszerek keresőfunkciót megértse és a gyakorlatban alkalmazza. A hardverismereteket támogatja a matematikai logika és az áramköri tervezés rész. A bizonyítási igény a szabatosságra és tudományos precizitásra nevel.

1.5 TANULÁSI TANÁCSOK, TUDNIVALÓK

A teljes tananyag önálló tanulásra is alkalmas, de csak abban az esetben, ha a hallgató a leckéket sorban, egymás után sajátítja el, mivel a tananyag tárgyalása erősen épül az előző részekre. A leckéket nem érdemes átlépni, hiszen az olykor lehetetlenné teszi a következő leckék valamelyikének a megértését. Egy leckében éppen ezért nem helyeztünk el sok elméleti anyagot, inkább a példák és a feladatok vannak többségben.

A logika történetéről szóló fejezetet érdemes a tananyag feldolgozása előtt felületesen átolvasni, majd a többi lecke után következzen az alapos feldolgozás, mivel a tudománytörténet óhatatlanul tartalmaz a későbbiekben kifejtett és megmagyarázott fogalmakat, tételeket.

A matematikai, azaz egymásra épülő tárgyalás miatt a korábbi leckék definícióinak és a tételeinek ismerete elengedhetetlen az előrehaladásához. A tanultakat példák és a feladatok megoldásával rögzítheti. A feladatokat a lecke végén annyiszor kell megoldani, amíg azok a megoldás megtekintése nélkül önállóan is elvégezhetők. Az érdeklődök számára ajánljuk a szakirodalmi utalásokat.

A számonkérés teszt formában történik, amiben elméleti és gyakorlati kérdések is szerepelnek. A gyakorlat hangsúlyos, azonban a tantárgy sikeres befejezéshez az elméletre és a gyakorlatra is szükség van. A számonkérés erősen kapcsolódik a jegyzethez, a feladatokat tekintve is. Az elméleti tudását az ellenőrző kérdésekkel mérheti le, de kétségek esetén érdemes az oktatójától kérdezni, hiszen egy elakadás megakadályozhatja a tananyag feldolgozását. Az elméleti rész jelentőségét ne becsülje le, ha nem értette meg, vagy nem képes visszaadni, akkor nézze át újból!

2. A LOGIKA TÖRTÉNETE, TÁRGYA

2.1 CÉLKITŰZÉS

A matematika történetén belül a matematikai logika helye, a matematika és a logika szoros kapcsolatának megértése. A matematikai logika szerepe a matematikai bizonyításoknál. A logika jeles személyei életének megismerése.

2.2 TARTALOM

A logikai gondolkodás születése
Az ókor és Arisztotelész
Igazságfüggvények megjelenése
A középkor – Arisztotelészi logika ismét
Az újkor
A szimbolikus logika kialakulása
A 20. századi fejlődés
A szimbolikus logika
A szimbolikus logika tárgya
Matematika és logika
Matematikai logika

2.3 A TANANYAG KIFEJTÉSE

A szimbolikus logika kutatási témáit a századfordulón főként matematikai megalapozása és filozófiai problémái, később a tudományos módszertan ösztönözte. A 20. század második felében az elméleti nyelvészet problémái befolyásolták továbbfejlődését.

A szimbolikus logika csírája, a logikai kalkulus ősképe már Arisztotelész szillogisztikájában (szillogizmus) megtalálható. Egy egyetemes szimbólumnyelv megteremtésének s a logika matematizálásának programját G. W. Leibniz tűzte ki (characteristica universalis), s lépéseket tett realizálására is. Az első matematizált logikai rendszer G. Boole-tól származik (1847, logikai algebra).

G. Frege fogalomírása (1879) magában foglalja a mai szimbolikus logika központi jelentőségű fejezetét, a klasszikus elsőrendű logikát; innen keltezhető a szimbolikus logika kialakulása. Frege munkássága azonban – részben szokatlan kétdimenziós szimbólumrendszere miatt – kevés figyelmet keltett. A mai szimbólumrendszer nagyrészt G. Peanótól és B. Russelltól származik. Russell és A. N. Whitehead a matematika logicista megalapozására igyekezett felhasználni a szimbolikus logikát (1910–13).

A matematikai alkalmazások szempontjából a 20. sz. első harmadában D. Hilbert és K. Gödel munkássága a legjelentősebb. A szimbolikus logika alkalmazása a modális logika területén C. I. Lewis munkásságával kezdődött. A többértékű logikák kidolgozását Emil Leon Post (1897, 954) és J. Lukasiewicz kezdte meg. A matematikán kívüli alkalmazások úttörője az 1920-as évektől R. Carnap.

Az intenzionális logika 1945 után bontakozott ki; fő eredményei Carnap, A. Church, S. Kripke és R. Montague nevéhez fűződnek. Magyarországon Kalmár László kezdeményezte a szimbolikus logika, illetve a matematikai logika mint matematikai diszciplína művelését, tevékenysége azonban a matematikán kívüli területekre is hatott.

2.3.1 A logikai gondolkodás születése

Filozófiai természetű az a legkorábban keletkezett szöveg, amelyben a szerző tisztán logikai úton kísérli meg állításait bebizonyítani. Az i.e. 5. század első feléhez köthető tanköltemény fennmaradt töredékei a görög filozófus, Parmenidész kezemunkáját dicsérik. Parmenidész a logikai gondolkodás máig kiemelt eszközének, az indirekt bizonyításnak a szülőatyja.

Zénón továbbfejlesztette a módszerét, ő Parmenidész tanítványa volt. A logikai bizonyítás igazi diadalútját azonban nem a filozófiában hanem a matematikában futotta be. A matematika, amely a görögök előtti társadalmakban tapasztalati eredetű mérési és számolási szabályok gyűjteménye volt, a Parmenidészt követő mintegy száz-százötven évben bizonyíthatóan Parmenidész és Zénón gondolatainak hatására elnyerte úgyszólván mai alakját: olyan tudomány lett, amely állításait kevés számú kiinduló állítás (az axiómák) igazságát feltételezve, szigorúan logikai úton, azaz minden megfigyelés és egyéb tapasztalat felhasználásának kizárásával, egyedül az értelemre támaszkodva bizonyítja. (A korai görög filozófia és a matematika kialakulása közötti összefüggés kutatásában magyar tudós, Szabó Árpád tett az utóbbi évtizedekben kiemelkedő jelentőségű felfedezéseket.)

Az i.e. 4. században Platón filozófiai munkáiban számos matematikai utalás szerepel: a bizonyításon alapuló matematika úgyszólván mintapéldája a tudásnak, az emberi gondolkodás erejének. Platón szerint az igazi filozófiának a matematika módszerét, a tisztán logikai bizonyítást kell még magasabb tökélyre emelnie, hogy a célhoz, a jó megismeréséhez eljusson. Platón műveiben számos éles elmére valló bizonyítást is találunk; ezeken túl helyenként már arra is törekszik, hogy megfogalmazza: mik a bizonyítás alapelvei, szabályai, azaz talán első ízben mond ki logikai törvényeket. Találkozhatunk például annak általános kimondásával, hogy valami nem lehet egyszerre igaz és hamis. Ezt a felfedezést talán ma már nem tudjuk a mély gondolatoknak kijáró csodálattal szemlélni; de nem is ez a lényeg, hanem az, hogy kialakul és meghozza első eredményeit is egy olyan fogalomrendszer, amelyben teljes általánosságban lehet állításokról vagy a gondolkodás más alapelemeiről beszélni. Platón még nem fejlesztette a logikai alapelveket összefüggő elméletté.

Az első rendszeres logikai elmélet a görög filozófia másik kiemelkedő alakjától, Arisztotelésztől származik. Arisztotelész (i.e. 384–322) Platón tanítványa volt, később pedig filozófiai vetélytársa. Arisztotelész egyik művében (Organon 3. rész) a következtetési sémák viszonylag széles körének szisztematikus vizsgálata szerepel, amelyben a szerző kiválasztja a helyes és cáfolja a hibás következtetéseket. Kifejtése során lényegesen felhasználta a matematikából átvett axiomatikus módszert, és már betűparamétereket is használt a logikai törvények általánosságának kifejezésére. Miután kétezer éven keresztül ezzel az elmélettel illetve későbbi átdolgozásával, a tradicionális logikával azonosították a logikát, vagy legalábbis az úgynevezett formális logikát, és ennek következtében a tradicionális logika terminológiájával és fogalomrendszerével még ma is találkozhatunk, érdemes Arisztotelész gondolataival behatóbban megismerkednünk.

2.3.2 Az ókor és Arisztotelész

Arisztotelész (Aristoteles) élete

Arisztotelész (Kr. e. 384 Sztageira, Kr. e. 322 Khalkisz); ókori görög filozófus. A peripatetikus iskola megalapítója. Apja, Nikomakhosz II. Amüntasz makedóniai király háziorvosa volt. Arisztotelész 18 éves korában Athénba költözött. Kr. e. 366-347 között Platón tanítványa volt.

Mestere halála után elhagyta Athént, és Asszoszban, majd Mütilénében tanított. 347-ben elvállalta a makedón trónörökös, a későbbi III. Alexandrosz (Nagy Sándor) nevelését. Tanítványa trónra lépésekor (335) visszatért Athénba, és megnyitotta iskoláját, a Lükeiont. Életének legtermékenyebb korszaka III. Alexandrosz haláláig (323) tartott. A makedónellenes politikai hangulat miatt ekkor menekülnie kellett. Khalkiszra húzódott vissza, s rövidesen ott is halt meg.

1. kép Arisztotelész portréja

Sokrétű tudományos tevékenysége három korszakra osztható: a tanuló-, a vándor- és a mesterévek időszakára. Az első korszakban írott művei csak utalásokból és töredékesen ismertek, a fennmaradt iratok a második és harmadik korszak termékei.

Ezt az anyagot, amely halála után kétszáz évig lappangott, a Kr. e. 1. sz.-ban rhodoszi Andronikosz szerkesztette meg. Szerkesztésében a következő tematikus sorrendet alkalmazta: logikai iratok, természetfilozófiai értekezések, metafizikai, etikai és politikai írások, végül a Poiétika c. töredék. Az athéni alkotmány című szöveg 1890-ben, Egyiptomban került elő.

Arisztotelész a logika megalapozója. Hat fönnmaradt logikai művére (Katégoriák, Herméneutika, Első és Második Analütika, Topika, A szofisták cáfolata) az összefoglaló Organon (görögül „eszköz”) címen szokás hivatkozni. A logikát Arisztotelész nem önálló tudománynak, hanem előzetes tudnivalónak tekintette, amellyel a teoretikus tudományok művelőinek rendelkeznie kell.

Három teoretikus tudományt különböztetett meg: az első és második filozófiát, valamint a matematikát. Ez utóbbival ő maga nem foglalkozott.

Az arisztotelészi logika

Az arisztotelészi logika őse a hagyományos és a szimbolikus logikának, az utóbbiról szól ez a jegyzet is. Arisztotelész munkái közül elsősorban a Herméneutika című művet kell kiemelni, az abban kidolgozott ún. formális logika kidolgozásával teremtette meg a logika tudományát. A logika fejlődését tekintve ebben jelentős a szillogisztika (következtetések tana) részletezése. Észrevette, hogy a következtetések helyessége kizárólag a szillogizmusban szereplő állítások logikai szerkezetétől és a logikai szavak (nem, és, minden, azonos) jelentésétől függ.

E logikának gazdag fejezete még a kategóriaelmélet. A kategóriák (szubsztancia, mennyiség, minőség, viszony, hely, idő, helyzet, állapot, cselekvés, elszenvedés) a legáltalánosabb fogalmak, amelyeknek „önállóan mondva egyik sem foglal magában állítást”, de megadják a létezők legáltalánosabb típusait.

Arisztotelész logikai vizsgálatai az ún. kategorikus állításokra összpontosultak. Az ide tartozó négy típust és a logikai szerkezetüket egy-egy példával illusztráljuk, hozzátéve, hogy a logikai szerkezet (formula) csak a tananyag megismerése után lesz érthető.

(1) Minden ember halandó.	Formulája: $\forall x\ (Ex \rightarrow Hx)$
(2) Némely görög filozófus.	Formulája: $\exists\ x\ (Gx \wedge Fx)$
(3) Egyetlen athéni sem spártai.	Formulája: $\forall x\ (Ax \rightarrow \rceil Sx)$
(4) Némely filozófus nem görög.	Formulája: $\exists\ x\ (Fx \wedge \rceil Gx)$

Az arisztotelészi grammatika szerint ezen állítások szerkezete a következő: alany, állítmány (azaz az első és a második predikátum) és az alanyhoz kapcsolódó mennyiségjelző (azaz a kvantorszó). A későbbi részek áttanulmányozása után megértjük, hogy a nyelvi forma nem mutatja a kondicionálist ill. a konjunkciót, de jelzi a negációt.

A szimbolikus logika kialakulása előtti ún. tradicionális logikában ezeket a formákat, lényegében a természetes nyelv grammatikája szerint elemezték. Az ítéletek (az állítás helyett az ítélet terminus használták szívesebben) szubjektumból és predikátumból állnak. A subiectum (latin) magyar jelentése alany, míg a praedicatum jelentése állítmány. A tananyagban a későbbiekben alkalmazott predikátum fogalomnak azonban kevés köze van az előbbi predikátum fogalmához.

Az ítéletek terjedelem tekintetében kétfélék: általánosak, mint (1) és (3), vagy részlegesek, mint (2) és (4), aszerint, hogy a predikátumot a szubjektum egész terjedelmére vagy csak egy részére vonatkoztatjuk. Minőség tekintetében ugyancsak kétfélék, éspedig állítóak, mint (1) és (2), vagy tagadóak, mint (3) és (4), aszerint, hogy a szubjektumról állítjuk vagy tagadjuk a predikátumot.

Csakhogy a fenti sémákból a szubjektum negálásával adódó állítások fontosak lehetnek, de ezeket más nyelvi formákkal (mellékmondat, alany és állítmány megcserélése stb.) fejezzük ki. Már ez a téma is mutatja, mennyire alkalmatlan a természetes nyelvtan fogalomrendszere a logikai elemzés számára: megkülönbözteti azt, amit nem kellene: teljesen azonos logikai természetű és szerepű kifejezéseket, mint a 'görög' és a 'filozófus' szavak a (2) állításban. Ugyanakkor megkülönböztetés nélkül együtt tárgyal teljesen különböző dolgokat: az egyedi név az alany helyén éppúgy szubjektum, mint a fenti példákban az alany szerepében fellépő – mai értelemben vett – predikátum.

Tehát a vizsgált állítástípusok, az úgynevezett kategorikus ítéletek rendszere a következő:

1. Általános állító — Formulája: $\forall x\,(Ex \rightarrow Hx)$
2. Részleges állító — Formulája: $\exists\, x\,(Gx \wedge Fx)$
3. Általános tagadó — Formulája: $\forall x\,(Ax \rightarrow \rceil Sx)$
4. Részleges tagadó — Formulája: $\exists\, x\,(Fx \wedge \rceil Gx)$

Az A, E, F, G, H itt interpretálatlan paraméterek. Természetesen ez a négy séma nem feddheti le az összes ítéletet. Hibás olyan kijelentést, mint pl. „Szókratész halandó" az 1. típusba sorolni, azaz nem helyes a nevet (Szókratész) behelyettesíteni. Arisztotelész munkájából kitűnik, hogy elméletének korlátaival maga is tisztában volt; több olyan problémát említ, amelyben nem kategorikus állítások szerepelnek. A legutóbb említett hibába pedig ő még nem esett bele, mert következtetéselméletében neveket tartalmazó állításokat sehol sem szerepeltetett.

Elméletét nem fejlesztették tovább az általa fölvetett, de meg nem oldott problémák irányába, viszont állandó iskolapéldaként szerepeltették ezt a következtetést: „Minden ember halandó. Szókratész ember. Tehát Szókratész halandó", noha ez valójában nem kategorikus állításokból áll. Ez arról tanúskodik, hogy mennyire megmerevítették és félreértették sokszáz éven keresztül Arisztotelészt.

A kategorikus állítások tanulmányozását valóban Arisztotelész kezdte meg, és az említett négy típust is ő vezette be; ám szerepük és jelentőségük egyoldalú eltúlzása nem az ő műve.

A kategorikus szillogizmusok a tradicionális logika alapvető következtetési sémái. Arisztotelész a helyes kategorikus szillogizmusoknak megfelelő feltételes állítás-sémákat nevezte szillogizmusoknak, a „kategorikus"-nak megfelelő jelzőt pedig nem használt.

Kategorikus szillogizmus egy következtetési séma, ha eleget tesz a következő kikötéseknek:

1. Mind a premisszák (sorrendben a felső és az alsó tétel), mind a konklúzió kategorikus állítások.

2. A premisszákban előforduló két-két fogalom (predikátum) közül az egyik közös, ez a középfogalom; amelyik csak a felső tételben fordul elő, az a főfogalom, amelyik pedig csak az alsóban, az az alfogalom.

3. A zárótétel alanya az alfogalom, állítmánya a főfogalom.

Arisztotelész azt tekintette feladatának, hogy az összes lehetséges ilyen séma közül kiválassza a helyeseket. Ha tekintetbe vesszük azt a ki nem mondott föltevését, hogy egy fogalom terjedelme sohasem lehet üres, akkor eredményei kifogástalanok. Ha ezt a korlátozást elvetjük, akkor Arisztotelész helyesnek minősített szillogizmusai közül néhányat hibásnak kell mondanunk. Megjegyezzük azonban, hogy a hibás szillogizmusok egy-egy létezési pótpremissza felvételével kijavíthatók. Azok az esetek, amelyeket Arisztotelész elvetett, valóban mind hibás következtetések, és nem is javíthatók kézenfekvő módon.

Arisztotelész módszere az volt, hogy a szillogizmusok helyességét először külön-külön érveléssel bizonyította, a hibásakat pedig cáfoló interpretáció megadásával szűrte ki. Ezek után a helyes szillogizmusokat még két, axiómának tekintett (tökéletes) szillogizmusból is levezette.

Arisztotelész elmélete mind eredményeit, mind módszerét tekintve az európai tudomány hajnalának egyik kiemelkedő teljesítménye. Elsőnek oldotta meg a helyes következtetés problémáját az állítások egy meghatározott körében. Helytálló eredményei – korszerűbb megfogalmazásban – részét alkotják mai logikai tudásunknak is. Az arisztotelészi következtetéseket ma legegyszerűbben a Venn-diagramok módszerével vizsgálhatjuk, melyet a prédikátumlogikáról szóló leckében taglalunk.

2.3.3 Az igazságfüggvények megjelenése

Az igazságfüggvényekre vonatkozó első rendszeres elmélet az egyik későbbi görög filozófiai iskola híveinek, a sztoikusoknak a nevéhez fűződik. A sztoicizmus ma – elsősorban későbbi művelőinek munkássága és élete alapján – mint etikai és erkölcsi irányzat, magatartás közismert. Az i.e. 3-2. században a régi sztoikusok azonban az etika mellett a logikát és a fizikát – a természetfilozófiát – is egyenrangú ágazatoknak tekintették. Igazságfüggvényként definiálták a „nem”, „és”, „ha ... akkor”, „vagy” kifejezések (funktorok) jelentését, azaz meghatározták és használták a legfontosabb igazságfüggvényeket. A negáció és a konjunkció definiálása nem jelentett problémát.

A kondicionális már akkor is sok vitát váltott ki, de uralkodó felfogássá a maival megegyező meghatározás vált (eredetileg nem sztoikus filozófus, hanem az úgynevezett megarai iskolához tartozó Philón gondolata). A „vagy” használata nem volt egységes: egyesek az alternáció, mások a kizáró „vagy” értelmében alkalmazták. Következtetési szabályok megfogalmazására törekedtek, mégpedig az axiomatikus módszer alkalmazásával, s e téren a rendszeresség és következetesség tekintetében túlszárnyalták Arisztotelészt.

Néhány egyszerű következtetési sémát elfogadtak helyesnek, majd ezekből igen nagy biztonsággal vezettek le különböző összetett szabályokat. A sémák általános érvényének kifejezésére nem használtak betűparamétereket mint Arisztotelész, hanem a konkrét állításokra sorszámozással utaltak. A sztoikus megfogalmazásban az a séma, amelyet mi leválasztási szabálynak nevezünk, és amely egyik axiómájuk volt, ilyesféleképp hangzott:

> Ha az első, akkor a második.
> Az első.
> Tehát: A második.

Ha az itt használt számozást nem keverjük össze más összefüggésben használt sorszámnevekkel, akkor ez a kifejezésmód teljesen pontos. A sorszámnevek itt az állításparaméterek funkcióját töltik be. Későbbi kommentárok néha értetlen módon empirizmust vetettek a sztoikusok szemére, pedig szó sincs arról, hogy következtetések helyességének igazolásakor a tapasztalatra hivatkoztak volna; ám szemléltető példákért gyakran fordultak a fizikához.

2.3.4 A középkor – Arisztotelészi logika ismét

Az arisztotelészi elmélet hosszú egyeduralomra tett szert a logika történetében. A sztoikusok elméletét részben elfelejtették, részben perifériára szorították. Az arisztotelészi négy ítéletfajtát kiegészítették ugyan a hipotetikus (kondicionálist tartalmazó) és a diszjunktív (két- vagy többtagú alternációt tartalmazó) ítéletekkel, melyekkel szemben kellett az arisztotelészi típusúakat kategorikusoknak minősíteni.

Ezekkel kapcsolatban felállítottak néhány következtetési szabályt, de ezek a bővítések inkább zavart okoztak, mint egységes elméletet. Arról, hogy igazságfunktorok a kategorikus ítéletek belső szerkezetében is szerepet játszhatnak, nem is esett szó.

A középkorban sokan és éles elmével foglalkoztak az arisztotelészi logika, valamint kisebb jelentőségű kibővítései számos részletkérdésével. Megtaláljuk például a De Morgan-szabályok viszonylag pontos megfogalmazását. Miután a későbbiekben ezeket elfelejtették, így a mai nevüket múlt századi, a szabályokat ismételten felfedező De Morgan után kapták. Itt-ott még a korlátokat is látták; tudták például (nevezetes példa), hogy a szillogizmusok elméletébe nem fér bele ez az egypremisszás következtetés:

Példa:
Minden ló állat.
Tehát: Minden lófej állatfej.

(Ez kézenfekvő, mert lényeges szerepe van benne az „x feje y-nak" kétargumentumú predikátumnak.) Mégsem tettek kísérletet a fogalmi keret megváltoztatására.

Matematika és a logika kapcsolata

Közben a matematika és a logika kezdeti gyümölcsöző kapcsolata megszakadt. Az ókori matematika legnagyobb művében, a kevéssel Arisztotelész után élt Eiukleidész Elemek című gyűjteményében a bizonyítások közben seregestül fordulnak elő olyan lépések, amelyeket a matematikus természetesen elfogad helyesnek, de a szillogisztika keretein belül nem igazolhatók. Egészen a 19. század végéig fennállt az a helyzet, hogy a következtetések, levezetések alkalmazásának legtágabb területe, a matematika semmire sem tudta használni a logikát, a következtetések elméletét.

Igazság szerint a matematikusok meg is elégedtek annyival, hogy következtetéseik helyessége szemléletesen nyilvánvaló. Amikor pedig a matematika fejlődésével, bonyolultabbá és elvontabbá válásával felvetődött a helyes matematikai bizonyítás szigorú kritériumai meghatározásának szükségessége, akkor végül matematikusok újították meg a logikát.

2.3.5 Az újkor

A középkor terjedelmes logikai irodalma után hosszú időn keresztül kizárólag kisiskolás szintű logikát írtak. Az újkor elején a filozófián belül is csökken a logika iránti érdeklődés. Francis Bacon korszaknyitó műve, a Novum Organum (új módszer) már címében is jelzi, hogy Arisztotelész logikai módszerével szemben az empirikus módszer kidolgozását tekinti feladatának, és a filozófiát a hagyományos spekuláció helyébe lépő tapasztalásra alapozva akarja megújítani. Egyetlen nagy kivételről kell megemlékeznünk: Leibnizről, aki a filozófia és a matematika történetében egyaránt kiemelkedő egyéniség volt.

Leibniz élete

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) német matematikus és filozófus. Foglalkozott még biológiával, geológiával, nyelvészettel, teológiával és joggal.

Lipcsében született. Kezdetben, szülővárosában és Jénában jogot tanult. Jogtudományi munkásságára felfigyelt a mainzi választófejedelem, és 1672-ben fontos diplomáciai feladattal Párizsba küldte. Az itt töltött évek sok kiváló tudóssal hozták össze. Németalföldi útja során megismerkedett Spinozával, Londonban felkereste Newtont. Utazásai alatt sok neves tudományos társaság tagjául választotta.

2. kép Gottfried Wilhelm Leibniz portréja

1676-ban Hannoverbe költözött. Itt a hannoveri herceg könyvtárosa, a braunschweigi uralkodóház történetírója volt. 1700-ban az ő kezdeményezésére született meg a berlini akadémia. Levelezett Nagy Péter orosz cárral, és 1711-ben az ő tervei szerint alakult meg a szentpétervári akadémia.

Mint politikus, teológus, filozófus és tudós fennkölt szelleméhez méltó munkásságot fejtett ki. Politikusként Németország egységének megteremtéséért küzdött. Mint teológus a katolikus és a protestáns egyház közötti ellentétet akarta megszüntetni. A filozófus Leibniz pedig kereste azt az általános módszert, a „scientia generalis”-t, amely lehetővé teszi a tudományos megismerést, a világ jelenségeinek megértését. A matematikus Leibniz minden tudományos munkájának ez volt a kerete, éppen úgy, mint Descartes esetében, de működési területe sokkal szélesebb volt Descartes-énál. Mindenben az általánost, a nagy összefüggéseket kereste. Történetírói működése is a módszere miatt jelentős.

Nyelvtudományi működésében összehasonlító szempontokat érvényesített. Mint jogász, a nemzetközi jogot fejlesztette. Az általános nyelv, a „lingua universalis” keresése vezette el a szimbolikus logikához.

Még párizsi tartózkodása alatt barátkozott össze Huygensszel. Az ifjú Huygens nagy hatással volt Leibnizre. Bár párizsi útja előtt is foglalkozott matematikával, hiszen – amint ez egyéniségéből következik – a „mennyiségek általános tudományában”, a matematikában is a még általánosabbat kereste, és megjósolta a mai matematika lényegét, mint speciális esetet tartalmazó, általános matematikát, amely már nem a mennyiségek, hanem a minőségek tudománya lesz. Ezt, a szimbólumokkal leírható, a minőségek kapcsolatait kifejező matematikát a kombinatorikában vélte felfedezni. A „kombinatorikus művészet” a sorrend, a viszony, a hasonlóság, általában a szimbólumokkal kifejezhető minőségi kapcsolatok tudománya. Ez lenne, Leibniz szerint, a mennyiségi összefüggéseket tárgyaló matematikát magába foglaló, új matematika. Ezért foglalkozott intenzíven a kombinatorikával, amelytől azt remélte, hogy elvezeti a matematika feletti matematikához.

Leibniz nagy mestere volt az új szimbólumok megalkotásának. Kevesen látták olyan mélyen a tartalom és a forma egységét, mint éppen ő. A ma használatos matematikai jelek között tőle származik többek között az egyenlő (=), a szorzás (•), a hasonlóság (~) jele. Leibniz használta először többek között a „függvény” és a „a koordináta” fogalmakat.

Neves tanítványai és követői, különösen Jacob és Johann Bernoulli, valamint Euler kezében a Leibniz felfedezte differenciál- és integrálszámítás módszerei varázslatos eredményeket hoztak, és hosszú időre megszabták a matematika fejlődésének az irányát. Ha arisztokrata rangokkal mérhetnénk a szellemi nagyságot, akkor Leibniz a matematikában is elérte azt a bárói címet, amellyel a hannoveri fejedelem elismerte e nagy szellem igazságot kutató, nemes célokra törő, munkás életének eredményeit.

A mai értelemben vett matematikai logika megszületését Leibniznek köszönhetjük. Életcéljának tekintette egy olyan módszernek a megtalálását, amely lehetővé teszi az új ismeretek felfedezését és végső fokon világunk megismerését. Ezt az általános módszert a matematika területén kereste, és így jutott el a kombinatorika tanulmányozása közben egy univerzális nyelv keresésének a gondolatához. Ez a nyelv a gondolkozás minden elemi tevékenységét szimbólumokkal fejezné ki, és a köztük feltalálható kapcsolatok éppen a logika törvényeit szolgáltatnák. E gondolatait a Dissertatio de arte combinatoria (Értekezés a kombinatorika tudományáról) című munkájában fejtette ki 1665-ben.

Leibniz szerepe a logikában

Leibniz a 17–18. század fordulóján kísérletet tett egy nagyobb hatóerejű logika kidolgozására, bár a program felvázolásán és a kezdeti lépések kidolgozásán nem jutott túl. Munkája hosszú ideig hatás és folytatás nélkül maradt.

A 18. század végétől új irányt vett az arisztotelészi tradicionális logikával szembeni elégedetlenség, az elégedetlenség forrása a klasszikus német filozófia kapcsán eszközölt javításra vezethető vissza, ennek révén torzult az arisztotelészi logika gondolati világa. Kant, a klasszikus német filozófia első nagy alakja hirdette meg, hogy a logikának nemcsak a formával, hanem a tartalommal is foglalkoznia kell, és mint az emberi megismerés legáltalánosabb kerete, nem maradhat közömbös a keretbe foglalt tartalom iránt.

Hegel, a klasszikus német idealizmus betetőzője, ezt a programot valósította meg azzal, hogy általános filozófiája egészét, lételméletét logika címmel adta elő. E fordulat óta használják a formális logika és a dialektikus logika megkülönböztetést.

A formális logika az arisztotelészi értelemben felfogott logika: a szabatos következtetésnek a logikai struktúrára alapozott elmélete. A formális logikát igen gyakran arisztotelészi logikának is nevezik.

A dialektikus logika arisztotelészi értelemben nem logika, hanem ismeretelmélet (sőt, Hegel felfogásában, lételmélet is). A továbbiakban a „logika” terminust változatlanul az arisztotelészi értelemben használjuk, többnyire mellőzve a „formális” jelzőt.

A 19. század

A 19. században újjáéled a szűkebb értelemben vett (formális) logika, a következtetések elmélete is. Több matematikus megkísérel valamilyen logikai algebrát teremteni. Közülük kiemelkedik George Boole. George Boole (1815–1864.) angol matematikus volt, a formalista algebra egyik képviselője. Két művében, a The Mathematical Analysis of Logic-ban (A logika matematikai analízise, 1847) és az An Investigation of the Laws of Thought-ban (A gondolkozás törvényeinek egy vizsgálata, 1854) kimutatta, hogy a formális logika törvényei a matematikában hasznosíthatók. Az általa megalapozott algebra célja az, hogy egyesítse a matematikát a logikával. Munkássága jelentős az algebra, a matematikai logika és a valószínűségszámítás területén.

Boole elméletét később E. Schröder fejlesztette tovább. Módszerük lényege az a felismerés, hogy az egyváltozós nyitott mondatok negációjának, konjunkciójának és alternációjának megfeleltethetők a terjedelmeikre – azaz a tárgyalási univerzum részhalmazaira – vonatkozó egyszerű halmazműveletek: a kiegészítő halmaz, a közös rész, ill. az egyesítés képzése. (A tárgyalási univerzum fogalma is Boole-tól származik.) A terjedelmek algebrája a Boole-Schröder-algebra.

3. kép George Boole portréja

Azt is felismerték, hogy az állítások igazságértékei ugyanezen logikai műveletekre vonatkozóan hasonló szerkezetű algebrát alkotnak. Ebben az elméletben az állítások és a predikátumok logikája még nem épül egybe. Boole, Schröder és kortársaik (A. De Morgan, J. Venn) még csak előkészítői a logika alapvető újraformálásának, főleg a matematikai szemléletmód és jelöléstechnika alkalmazása tekintetében. Eredményként könyvelhetjük el azonban, hogy legalább az azonos szerkezetű, és legalább az egyargumentumú predikátumok tekintetében lényegesen túllépnek a szillogisztika határain.

2.3.6 A szimbolikus logika kialakulása

A logika valódi reformja Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) német matematikus és filozófus nevéhez fűződik. Leibniz eszméihez erősen kapcsolódva Frege az aritmetika törvényeinek a logikára való visszavezetését tekintette céljának. Ehhez volt szüksége olyan logikára, amelyben a matematikai következtetések reprodukálhatók és igazolhatók. Ezt a logikát az 1879-ben megjelent Fogalomírás című munkájában tette közzé.

4. kép Friedrich Ludwig Gottlob Frege portréja

Ha fel akarjuk sorolni Frege újításait a logika terén, akkor a mai logikai elmélet úgyszólván összes sarkalatos pontját meg kell említeni:

- felszámolta a hagyományos alany-állítmány megkülönböztetést, helyébe állítva a funktor és argumentuma szerinti elemzést,
- felfedezte a kvantifikációt, és ezzel megteremtette az összefüggést az igazságfunktorok és a predikátumok elmélete között,
- elsőként tette lehetővé a többargumentumú predikátumokkal kapcsolatos következtetések vizsgálatát,
- egységes rendszerbe foglalta az igazságfüggvények elméletét, sőt a sztoikusok óta először ő adott pontos definíciókat az igazságfüggvényekre,
- megalkotta a logika számára az első teljes értékű grammatikát, amelyben világosan elkülönülnek a logikai jelek és a változtatható jelentésű szimbólumok (a paraméterek), és amelyben a logikai szimbólumoknak pontosan rögzített jelentésük van.

A felsoroltak alapján egyértelműen ő tekinthető a szimbolikus logika megteremtőjének, ami talán a legmegfelelőbb elnevezése annak a modern logikának, ami az 1879-től a tradicionális logikát váltotta fel.

A mai logikai jelrendszer jórészt G. Peano olasz matematikustól származik, aki az 1890-es években maga is egy olyan „fogalomírás" kidolgozásán munkálkodott, amely a matematikai bizonyítások kifejezésére alkalmas. Peano jelei a 20. század elején főleg Bertrand Russell közvetítésével lettek szélesebb körben ismertté. Frege más jelöléstechnikát használt, mint amelyet e könyvben alkalmaztunk, de a jelölésrendszerünk részben Peanoétól is eltér.

2.3.7 A 20. századi fejlődés

Az új logikai elmélet felfedezését (Frege) egy darabig kevés figyelemre méltatták. A 20. század elejétől kezdve viszont az új logika óriási szerepet játszik a matematika alapjaira vonatkozó kutatásokban. A század kezdetétől fogva, de főleg az első világháború után jelentőssé vált a szimbolikus logika hatása egyes polgári filozófiai irányzatok fejlődésére.

A harmincas években születtek a matematikai logika kibontakozása során, a bizonyításelmélet első nagy eredményei. A második világháború után pedig a tudomány egyre több területére vonul be hasznos segédeszközként a modern logika. Kiemelhetjük ebből a szempontból a számítógép-tudományt, a nyelvészetet, a pszichológia egyes ágait.

Az extenzionális és intenzionális logika

A logikai szemantika extenzionális elméletének szabatos kidolgozása az 1930-as években főleg a lengyel Alfred Tarski nevéhez fűződik. A teljes extenzionális logika modern kiépítése 1950 körül Alonzo Church és Leon Henkin amerikai logikusok érdeme. Az extenzionális logika olyan logikai rendszer, amely kizárólag logikai összefüggésekkel (törvényekkel) foglalkozik, amelyek jól formált kifejezések (terminusok, predikátumok, mondatok) extenziója (halmaza) közötti kapcsolatokon alapulnak, tekintet nélkül a kifejezések intenziójára, azaz jelentésére.

Az intenzionális logika felé haladás első lépése a modális logika kidolgozása volt. Ez az elmélet a „szükségszerű, hogy p", „lehetséges, hogy p" szerkezetű állítások logikai törvényeivel foglalkozik (az ezekben szereplő mondatfunktorok kétségtelenül intenzionálisak). Eredete Arisztotelészig nyúlik vissza, ugyanis ő kidolgozta a modális szillogizmusok elméletét is. A modern szimbolikus logika keretében az 1910-es évektől kezdve a modális logikai kutatások úttörője C. I. Lewis amerikai logikus volt. Kezdetben a modalitások törvényeit logikai kalkulusok (szabályrendszerek) keretében vizsgálták. A modális szemantika megalkotása az 1960-as évek elején alapvetően S. A. Kripke amerikai logikus érdeme.

Az intenzionális logika általános elméletének első változata 1950-ben Churchtől származik. Egy fejlettebb változat, amely felhasználja Kripke modális szemantikájának újításait, R. Montague amerikai logikus műve 1970-ben. A szemantikai értékrés figyelembevételére 1957-ben történt az első kezdeményezés, amely A. N. Prior angol logikustól ered.

Logikai kutatások

A fentiekben vázolt fő fejlődési vonal mellett számos, speciális szakterületre vonatkozó „alkalmazott" logikai kutatásról is említést tehetünk. Ide tartoznak a matematikai bizonyításelméletre vonatkozó eredmények a harmincas évekből (K. Gödel, B. Rosser, Church, Tarski), a matematika ún. intuicionista vagy konstruktivista irányzatához kapcsolódó „intuicionista logika", továbbá jórészt a modális logikai kutatások is. További szakterületek: a normák logikája (G. H. von Wright), az igeidők logikája (Prior), egyes természetes nyelvi szerkezetek modellálása az intenzionális logikában (Montague).

A 20. században új logikai irányzatok is keletkeztek, köztük olyanok is, amelyek egyben-másban vitatják a logika Arisztotelésztől és Fregétől származó alapelveit. Ezekkel az irányzatokkal nem foglalkozhatunk, részben terjedelmi okokból, részben pedig azért sem, mert a közölni kívánt tananyaghoz nem kapcsolódnak.

A magyarok eredményei

A hazai logikakutatás területén nemcsak jelentős kutatókról beszélhetünk, hanem jelentős logikaiskolákról is. Elmondhatjuk, hogy ezen iskolák komoly szerepet játszottak a 20. századi logika történetében. Péter Rózsa a rekurzív függvények területén ért el fontos eredményeket.

5. kép Kalmár László portréja

Kalmár László, aki iskolát teremtett a számítástudomány, és ezen belül is az elméleti számítástudomány terén, a logika számítástudományi alkalmazásaiban vitt úttörő szerepet.

Ruzsa Imre a logika humán alkalmazásainak területén teremtett iskolát, kutatási területe elsősorban a nem klasszikus logikák, ezen belül például az intenzionális logika.

Németi István és Andréka Hajnal az algebrai logikában teremtett nemzetközi hírű iskolát. Bekapcsolódtak a Tarski-csoport munkájába, és a témakör vezető kutatói közé számítanak, de fontos eredményeik vannak a logika számítástudományi alkalmazásainak terén is.

Makkai Mihály területe a modellelmélet, számos eredmény fűződik a nevéhez. A felsorolt kutatók valamennyien a logika oktatásának területén is elévülhetetlen érdemeket szereztek.

2.3.8 A szimbolikus logika

A (formális) logika, korszerű formája. A szimbolikus logika interdiszciplináris jellegű tudomány, amely főként a filozófia, a matematika és az elméleti nyelvészet kutatási témáihoz kapcsolódik. Bár a logika olyan kérdéseket vizsgál, amelyeket először az ókorban a filozófia vetett föl, ma nem szükséges és nem is előnyös a logikát – legalábbis a szimbolikus logikát – a filozófia részének tekinteni, mert az egyes logikai törvények elismerése nem függ össze közvetlenül a filozófia alapvető kérdéseiben elfoglalt állásponttal.

A logika hasznos eszköze a filozófiai problémák elemzésének, de mint eszköz, önmagában nem elegendő azok megoldásához. Ezért van az, hogy nagyon különböző világnézetű filozófusok is eredményesen használhatják a logikát anélkül, hogy pusztán ennek következtében meg kellene változtatniuk világnézeti állásfoglalásukat.

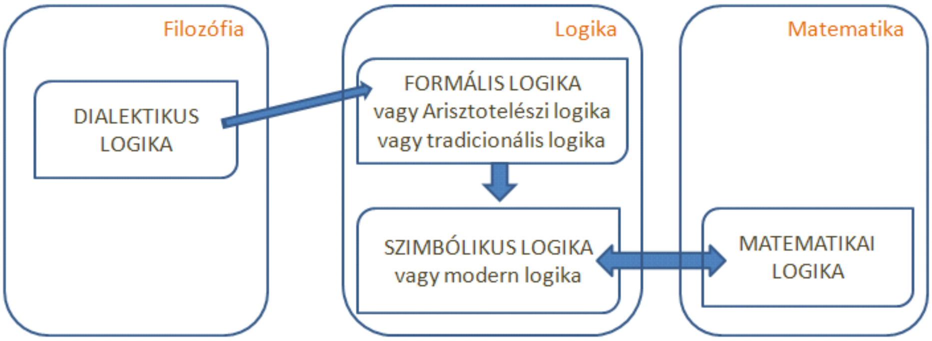
Mivel a filozófia a gondolkodás tudománya, érdemes tisztázni a logikának az emberi gondolkodással való kapcsolatát is. Mondhatjuk-e, hogy a (formális) logika az emberi gondolkodás – vagy legalább a helyes gondolkodás – törvényeinek feltárásával foglalkozik? Tananyagunkban találkoztunk a logikai igazságokat kifejező érvényes sémákkal, következtetési sémákkal, a definíciókra vonatkozó szabályokkal stb. Ezek lennének-e a (helyes) gondolkodás törvényei? Nos, az egyszerű következtetési sémák egy részét (tudatosan vagy nem tudatosan) rendszeresen használjuk a mindennapi tevékenységünk során (és persze a tudományos gyakorlatban is); ezek valóban olyan szabályokat fejeznek ki, amelyeknek a megsértése esetén nyilvánvaló gondolkodási hibáról szoktunk beszélni. Így a logika szabályai, törvényei között kétségtelenül vannak olyanok, amelyek a helyes gondolkodás normáit fejezik ki.

Kapcsolat a matematika tudományával

Maga a szimbolikus logika nem része a matematikának, hanem önálló tudományág, amely (számos más tudományhoz hasonlóan) matematikai eszközöket is használ. A szimbolikus logika a humán tudományokban való alkalmazásaival összefüggő kutatási területeit gyakran filozófiai logikának mondják.

A szimbolikus logika és a matematikai logika elnevezéseket néha szinonim értelemben használják; ám az utóbbi elnevezést helyesebb a matematika azon ágára alkalmazni, amely egyrészt a matematika logikai problémáival, másrészt a szimbolikus logikában alkalmazott matematikai apparátus – a logikai interpretációtól független, tisztán matematikai – vizsgálatával foglalkozik.

A matematikai logika formalizálja azt a nyelvet, amelyen a matematikai állításokat kimondjuk; szabályokat állít fel, hogy az állításokból új állításokra következtethessünk, állításformákat elemez, és bizonyítási módszereket fejleszt ki. Szokásos módon ennek alapjául a kétértékű logikát választják.



6. kép A logika tudományának kapcsolata a filozófia és a matematika tudományokkal

A szimbolikus logika felosztása

A szimbolikus logika jelenlegi állapota szerint több szempontból is felosztható.

1. Kétértékű és nem kétértékű logika. Mi a kétértékű (igaz, hamis) logikát vizsgáljuk a jegyzetben, de az alapfogalmaknál utalunk a többértékű logikára is. Az utóbbi szférába sorolhatók az explicite többértékű rendszerek mellett azok is, amelyek ugyan nem hivatkoznak igazságértékekre, de tételeik összeegyeztethetetlenek a kétértékű logika tételeivel.

2. Extenzionális és intenzionális logika.

3. Nullad-, első-, másod- és magasabb rendű, valamint típuselméleti rendszerek. Ez a felosztás a kvantifikálható változók típusainak száma (s egyben a kimutatható logikai szerkezet finomsági fokozata) szerinti.

Példa:
A tananyag a klasszikus elsőrendű logikáról szól, ez a logika kétértékű, extenzionális és elsőrendű, amit a neve is tükröz.

A hagyományos és szimbolikus logika

A szimbolikus logika korábbi szintjétől, az ún. hagyományos logikától a következő minőségi sajátságokban különbözik:

1. A logikai törvények pontos megfogalmazása, hatókörük egyértelmű megvonása érdekében nem egyetlen, „univerzális” logikával, hanem logikai rendszerek sokaságával foglalkozik.

2. A logikai rendszereket formalizált nyelvekre építi, s ezzel következetesen keresztülviszi a logika függetlenítését az egyes természetes nyelvek sajátságaitól. A formalizált nyelvek – amelyek keretében az új, korábban ismeretlen szerkezeti formákat használ – lehetővé teszik a fogalmak és az állítások logikai szerkezetének egyértelmű feltárását, kiküszöbölve a természetes nyelv kifejezéseinek jelentés ingadozásait. Ezzel függ össze az elnevezés. A hagyományos logikában csak korlátozottan használtak szimbólumokat, nevezetesen egyes nem logikai alkatrészeket jelöltek betűkkel. A szimbolikus logikában a logikai alkatrészeket is szimbólumok, az ún. logikai konstansok reprezentálják.

3. Törvényeit kevés alapelvre és a logikai jelek pontosan meghatározott jelentésére építi, a legalacsonyabbra csökkentve ezzel az ontológiai és ismeretelméleti megfontolásoktól való függőségüket.

4. A logikai rendszerek fölépítésében, szemantikai interpretálásában, általános törvényeik feltárásában és bizonyításában matematikai (főként halmazelméleti) eszközöket és módszereket használ. (Ehhez kapcsolódik a matematikai logika elnevezés.)

E sajátságok következtében a hagyományos logikát terjedelemben, mélységben és szabatosságban egyaránt messze meghaladó eredményeket ér el, és a tudományok egyre több területén válik a kutató, kifejtő és rendszerező munka hasznos, esetenként nélkülözhetetlen eszközévé.

A hagyományos logika kritikailag felülvizsgált eredményei a szimbolikus logikában is jelen vannak. A szimbolikus logika eredményei és eszközei fölhasználhatók az érvelés kritikai vizsgálatára, bizonyításra vagy cáfolásra, fogalmak szerkezeti elemzésére stb.

2.3.9 A szimbolikus logika tárgya

A (formális) logika nem ad számot sem az emberi megismerés folyamatáról, sem a problémamegoldó gondolkodás törvényeiről. Durván fogalmazva: a logikából csak azt tudjuk meg, hogy hogyan nem szabad okoskodnunk egy probléma gondolati megoldása során, de nem kapunk szabályokat, módszereket a problémák tényleges megoldásához. (Ez így nem egészen igaz, de a kissé túlzó fogalmazás segít a logika fő funkciójának megértésében.)

Mint tudjuk, a logika tárgya lényegében a helyes következtetés fogalmának tisztázása, törvényeinek feltárása. (Minden más logikai probléma vagy ehhez kapcsolódik, vagy erre vezethető vissza.) Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy a logika fő feladata nem a gondolkodás törvényeinek feltárása, hanem a gondolkodás eredményének kritikai elemzése. Segítségével ellenőrizhetjük akár a magunk, akár mások érvelésének (következtetésének) helyességét, feltárhatjuk az esetleges hibákat. A probléma megoldásnak nincsenek logikai szabályai. De annak ellenőrzésére, hogy megoldásunk helyes-e, a logika ad módszereket. Ugyancsak a logika ad útmutatást a definíciók és az állítások egyértelmű megfogalmazásához, az érveléseknek (bizonyításoknak) mások által is követhető kifejtésében. Ezért a logika tudatos felhasználása nélkülözhetetlen a tudományos kommunikációban és az oktatási gyakorlatban is.

A problémamegoldást illetően az iménti eltúlzott megállapítást úgy kell helyesbítenünk, hogy a logika a probléma megoldásához is nyújt segítséget, bár – eltekintve a triviális esetektől – önmagában nem elegendő. Ha a problémában figyelembe veendő tényezők száma nem túl nagy, akkor az ismert logikai eszközök – analitikus táblázat vagy Venn-diagram – felhasználásával az összes kombinációk feltárhatók a probléma megoldása(i) ezek közül kiszűrhető(k). Ezek az eszközök gyakran felhasználhatók a probléma részekre bontására (feltérképezésére), vagy egyes részletek megoldására is.

A modern szimbolikus logikának kiemelkedő szerepe van továbbá az elektronikus számoló-automaták tervezésében és programozásában. Mivel ezek az automaták a problémamegoldások fontos segédeszközei, közvetítésükkel igazolódik a logika jelentős eszközszerepe a problémamegoldásban, vagyis az alkotó emberi gondolkodásban.

Érdekes továbbá megfigyelni, hogy a tisztán logikai jellegű feladatok megoldása bizonyos szempontból a tudományos problémák megoldásának modellje is. Kezdetben rengeteg, látszólag összefüggéstelen adat áll a tudós rendelkezésére, amelyekből alig lehet törvényszerűségeket vagy összefüggéseket felismerni. E kiinduló adatokból a tudós feltételezéseket állít fel. A feltételezésekre alapozza kutatómunkáját, és a feladatra kapott megoldást összehasonlítja a kiinduló adatokkal. Ha a megoldás és a kiinduló adatok nincsenek összhangban, arra a következtetésre jut, hogy hibás feltételezésekkel dolgozott, ezért azokat elveti, és újakat állít fel. Ez a folyamat többször ismétlődhet, de végül a kiinduló adatoknak megfelelő megoldásra jut az immár helyes feltételezések alapján. Ezután megvizsgálja. hogy a megoldás egyértelmű-e, vannak-e még más megoldásváltozatok, és csak ezután tekinti a feladatot megoldottnak.

Hasonlóképpen megy végbe a logikai feladatok megoldása is. A logikai feladatok természetesen annyira eltérők, hogy egy-két szabványos megoldási mód nem vezethet eredményre.

2.3.10 Matematika és logika

A matematika története számtalan szempont alapján osztható korszakokra, de csak az utóbbi évtizedek erősítették meg a két tudomány kapcsolatát. Ha a matematika tartalma szerint, azaz a kutatási módszerek, eredmények, elvek alapján történik a felosztás, akkor elfogadhatjuk az A. N. Kolmogorov szovjet matematikus által megállapított korszakokat: a matematika keletkezésének a korszaka, az elemi matematika korszaka, a változó mennyiségek matematikája, a modern matematika korszaka. A korszakok sajátossága mellett kitérünk arra is, hogy a matematikai logika alapját képező bizonyítási igény, azaz a matematikai szabatosság mennyire volt hangsúlyos az egyes korszakokban.

A matematika keletkezésének kezdete az ősidőkbe vész és addig tartott, amíg ki nem alakult sajátos módszere, össze nem gyűlt a matematika sajátos anyaga, meg nem születtek az elemi fogalmak: azaz amíg önálló tudománnyá nem lett. Ez kb. az i. e. 4-5. századig tartó időszak. Kialakult a természetes és a törtszámok fogalma, megszülettek az elemi számolási műveletek, a gyakorlati feladatok számolási szabályai. A feladattípusok megoldására receptszerű utasításokat adtak. Kialakultak a számrendszerek. Készítettek táblázatokat a számolás megkönnyítésére. Megoldották az egyszerű gyakorlati geometriai feladatokat. Azonban a bizonyítási igény, a pontosságra törekvés, az általánosítás, az elméleti megalapozottság nem jellemezte ezt a korszakot, hiszen az eredményeket egyedül a tapasztalat igazolta.

Az elemi matematika korszaka (i. e. 6-5. század, és a 16. század közötti idő) az állandó mennyiségek tanulmányozásának a kora, ekkor fejlődött ki a mai értelemben vett tételes, deduktív matematika, ami lényegében minden állítást a bizonyítás nélkül elfogadott axiómákra vezet vissza. A dedukció (levezetés) a logikai kalkulusokban szereplő szintaktikai fogalom. Egy dedukció olyan véges, de nem üres formulasorozat, amelynek minden tagja vagy premissza, vagy a kalkulus valamely alapformulája (axiómája), vagy a sorozat tagjaiból az előre rögzített formális szabályokkal képezhető. Kialakításában az ókori görögök játszották a fő szerepet: Thalész, Püthagorasz, Hippokratész, Eudoxosz, Eukleidész, Arkhimédész, Apollóniosz, Ptolemaiosz, Diophantosz, Papposz. A görög-római kultúra hanyatlása után fejlődésnek indult az indiai matematika, ami a tízes helyértékrendszert, a zérót, a magasabb fokú egyenletek megoldását adta a világnak. Az ókor matematikáját az arabok mentették meg Európa számára (Al-Hvárizmi, al-Battáni, Abul-Vafa, al-Birúni).

A változó mennyiségek matematikája Descartes-től kezdődött, ami nagyon termékeny időszak volt. A sok vita közepette nem maradt idő az eredményt hozó új meg új fogalmak és eljárások aprólékos, szabatos vizsgálatára és megalapozására. A modern matematika korszakára maradt az alapozó tevékenység.

A 19. század végén és a 20. században híressé vált matematikusok (Bolzano, Cauchy, Dirichlet, Weierstrass, Dedekind, Cantor, Stieltjes, Riemann, Hilbert) vizsgálatai pótolták azt, amit az előző korszak elmulasztott. A felfedezések ideje azonban nem ért véget. Új elméletek, a vizsgálatra érdemes új tárgykörök, a matematika új ágai születtek és születnek. Korunkban azonban a matematikai kutatások különösen ott kapnak hangsúlyt, ahol a matematika alapjainak tisztázásáról van szó, azaz ott, ahol lényegében az emberi gondolkozás alapvető logikai törvényeit kell megállapítani. Ugyanakkor a technika és a természettudományok széles területen alkalmazzák a matematikai eredményeket, és az új kutatásokra ösztönzi a matematikusokat.

A matematika területei: matematikai logika, halmazelmélet, számelmélet, algebra (klasszikus algebra, lineáris algebra, csoportelmélet, gyűrű- és testelmélet, hálóelmélet, absztrakt algebra, univerzális algebra stb.), geometria (elemi geometria, euklideszi geometria, nemeuklideszi geometriák, ábrázoló geometria, analitikus geometria, trigonometria, projektív-geometria, differenciál-geometria, topológia, gráfelmélet), analízis (sorok elmélete, valós függvénytan, komplex függvénytan, differenciálegyenletek, integrálegyenletek, variációszámítás stb.), funkcionálanalízis, valószínűség számítás (matematikai statisztika, játékelmélet, információelmélet stb.), numerikus, grafikus és gépi módszerek elmélete, számítógép tudomány. A felsorolt ágak között vannak átfedések, ezeken túl a jövőben egy-egy zárójeles alfejezet önálló ágként jelenhet meg (pl. a topológia), hiszen folyton változó, rohanásszerűen fejlődő tudományról van szó. A felsorolt fejezetek közül kiemelkedő a matematika két alapvető területe a matematikai logika és a halmazelmélet, ugyanis a matematika többi ága ezekre épül.

2.3.11 Matematikai logika

A logika fejlődésének története a kezdetektől fogva fontos része az európai tudományos gondolkodás történetének. Különösen a filozófia és a matematika állt a logikával gyakran szoros kölcsönhatásban; olyannyira, hogy a logikát egyrészt hagyományosan, sőt olykor még ma is a filozófia részének tekintik, másrészt pedig a 20. század matematikájának egyik legjelentősebb és legdinamikusabban fejlődő ágazata a matematikai logika, amely a modern matematika egész arculatára rányomja a bélyegét, s a szimbolikus logika saját fejlődésében is óriási lépést jelent.

A matematika logika elsősorban a matematika megalapozásával foglalkozik, a matematikai fogalomalkotások jogosságát, azok tulajdonságait matematikai eszközökkel vizsgálja.

Fontosabb ágai a bizonyításelmélet, a modellelmélet, a rekurzióelmélet és időnként ide sorolják a halmazelméletet is. Tulajdonképpen a helyes gondolkodás ókortól tanulmányozott szabályai (logika) is a matematikai logika részét képezik, de igazán a matematika struktúrájának vizsgálatára hozta létre a 19–20. sz. fordulóján az alapok tisztázásának igénye.

A modern logikát néha matematikai logikának is nevezik. Ez az elnevezés annyiban helytálló, hogy a modern logika matematikai jellegű eszközöket használ egy-egy logikai elmélet pontos körvonalazására és törvényeinek bizonyítására. Az elnevezés azonban azt a téves elképzelést keltheti, hogy ez a logika a matematika logikája, azaz csak a matematikán belül használható; noha erről szó sincs, ezért a szimbolikus logika elnevezés a szerencsésebb.

A matematikának a fent említett fejezetét nevezhetjük inkább matematikai logikának, mivel ennek tárgya valóban a matematikai elméletek és bizonyítások szerkezetének, összefüggéseinek, törvényeinek, valamint a modem logikában alkalmazott matematikai eszközöknek és ezek általánosításainak a logikai alkalmazásoktól teljesen független, tisztán matematikai jellegű vizsgálata.

2.4 ÖSSZEFOGLALÁS

A megismerés törvényei mindig izgatták a kutató elméket. A logika a gondolkodás általános törvényszerűségeit, szabályait vizsgálja. A logika alapvető feladata a helyes következtetés fogalmának szabatos meghatározása, törvényeinek feltárása. A logikai megismerés törvényeinek vizsgálata régi múltra tekinthet. A logikai törvények első nagy rendszerezője Arisztotelész volt. A logika tehát az ókorig visszavezethető tudomány. A filozófia részeként volt ismert egészen a 19. század végéig.

Tulajdonképpen a helyes gondolkodás ókortól tanulmányozott szabályai (logika) is a matematikai logika szabályait képezik, de a matematikai logikát igazán matematika struktúrájának vizsgálata hozta létre a 19-20. század fordulóján az alapok tisztázásának igénye révén. A D. Hilbert által megfogalmazott program kérdései és az azokra adott válaszok (axiómarendszer, Gödel-tétel) jelentették az első nagy korszakát.

A logika a gondolkodás tudománya. A matematikai logika a logika tudományának az az ága, amely matematikai módszereket alkalmaz és a matematikában megszokott pontosságra törekszik. A matematikai logika ugyanazon alapelvekre épül, mint a hagyományos arisztotelészi (formális) logika, eredményei azonban túlhaladnak rajta.

A matematikai logika a matematikában használt gondolkodási formák és következtetések formális szabályaival foglalkozik. Feltárja az állítások szerkezetét, elvonatkoztatva azok tartalmi jelentésétől, és feladata a helyes következtetési szabályok megállapítása. A matematikai logika így a matematika, az informatika és más tudományágak megalapozását is szolgálja. Hozzájárul a helyes gondolkodásmód kialakításához és a nyelvi kifejezések megfelelő használatához.

A matematikai logika formalizálja azt a nyelvet, amelyen a matematikai állításokat kimondjuk; szabályokat állít fel, hogy az állításokból új állításokra következtethessünk, állításformákat elemez, és bizonyítási módszereket fejleszt ki. Szokásos módon ennek alapjául a kétértékű logikát választják.

Leibniz nyomán főleg az algebra területén indultak meg azok a kutatások, amelyek a logikai és matematikai ítéletalkotás módszerei közötti hasonlóságot vagy eltérést vizsgálták. Ezek eredményeként született meg a Boole-féle algebra is, melyet az angol G. Boolenak köszönhetünk. Eredményeit a valószínűség számításban alkalmazta. Hasonló szellemben működtek Augustus de Morgan (1806–1871) és W. S. Jevons (1835–1882) angol kutatók, akik a Boole-algebrát továbbfejlesztették. A matematikai logika kiváló amerikai művelője C. S. Peirce (1839–1914) volt.

A D. Hilbert által megfogalmazott program kérdései és az azokra adott válaszok (axiómarendszer, Gödel-téte) jelentették a matematikai logika első nagy korszakát.

2.5 ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mutassa be Arisztotelész és Leibniz szerepét!
2. Fogalmazza meg a szimbolikus logika lényegét!

3. ALAPFOGALMAK

3.1 CÉLKITŰZÉS

A leckében a matematika egészéhez kapcsolódó, a tananyag tárgyalása és a későbbi bizonyítások alapjául szolgáló fogalmakat, valamint a matematikai logika megértéséhez elengedhetetlenül szükséges fogalmakat ismerhetjük meg. Ezen túl összefoglaljuk a tananyagban alkalmazott összes jelölést, amit a tanulás és a feladatok megoldása során útmutatóként érdemes kezelni.

3.2 TARTALOM

Matematikai alapfogalmak
Matematikai logika
A kijelentés
Az Arisztoteleszi alapelvek
A logikai érték
Logikai szimbólumok. Állandó jelölések
Feladatok

3.3 A TANANYAG KIFEJTÉSE

3.3.1 Matematikai alapfogalmak

A nyelv egyes elemeit mindenképpen ismerni kell ahhoz, hogy megértsük a tárgyalás menetét. Ebben a részben a természettudományok, és azon belül a matematika legfontosabb alapfogalmait tisztázzuk. Az alapfogalom más fogalmak alapját alkotó fogalom, elemi ismeret, mely pontos ismerete nélkül nehézkes a ráépülő fogalmak szabatos megértése.

Vizsgáljuk meg, mit értünk definíció alatt! Definíción általában egy fogalom pontos körülhatárolását értik nagyobb összefüggéseken belül, más fogalmak felhasználásával. A problémák itt is hasonlóak, mint a bizonyításnál: végül szükségszerűen alapfogalmakba ütközünk, amelyek egy definíció számára a fenti értelemben már nem hozzáférhetők. Sok fogalmat, különösen az olyan alapfogalmakat, mint szám, pont, egyenes, távolság, terület stb., nem explicit, hanem implicit módon, kölcsönös összefüggések alapján definiálunk.

A matematikában az alapfogalmak, fogalmak és a műveletek ismeretében összefüggéseket állapítanak meg, melyek bizonyítási sikere után a további feladatoknál, tételeknél ismét felhasználhatóak.

A tétel a matematikában olyan állítás, amely igazolható, belátható.

Vannak személyekről elnevezett tételek (pl. Pitagorasz-tétel) és tárgykörről elnevezett tételek (pl. szinusztétel).

Az axióma a természettudományokban az az alapfelvetés, amelyet bizonyítás nélkül igaznak fogadnak el. Lehetővé teszik egyrészt a meglévő ismeretek egységes rendszerbe foglalását, másrészt új ismeretek megszerzését a belőlük logikai úton levont következtetések tapasztalati megfigyelése-igazolása során.

Az axióma a matematikában sok esetben bizonyítás nélkül elfogadott állítást jelent.

Az axióma tehát olyan állítás, amit mindig helyesnek, igaznak tételezünk fel. Az axiómát több értelemben is használják, pl. egy matematikai struktúrát definiáló alaptulajdonság is axióma (pl. csoportaxiómák).

Az azonosság olyan egyenlőség, amely a benne szereplő változók valamilyen körön belüli (egy adott halmazbeli), bármely megválasztása esetén teljesül. A matematikában más értelmezései is ismeretesek.

Példa
Azonosságra példaként a későbbi részekben szereplő De Morgan-azonosság szolgálhat.

Matematikai tételként rögzítjük a kijelentések között értelmezett logikai műveletekkel meghatározott későbbi összefüggéseket, például a logikai műveletek tulajdonságait. A tételeket az esetek többségében bebizonyítjuk.

A bizonyítás a matematikában az az eljárás, amelynek során megmutatjuk, hogy valamely állítás hogyan következik más, lehetőleg egyszerűbb (axióma), már elfogadott (sejtés) vagy ismert állításokból (tétel). Ha sikerült az állítást bizonyítani, akkor az állítás tétel, különben pedig ún. sejtés.

Az új állítások megfogalmazása (sejtés), valamint azok bebizonyítása (a tétel megfogalmazása) a matematika egyik jelentős feladata. Érdekes, hogy a matematikában egyes sejtések igazságértéke máig nincs megállapítva (még nem bizonyították be), mégis a szokásos felfogásnál, fel szabad tételezni, hogy ezek vagy igazak vagy hamisak. A milétoszi Thalész volt a matematikatörténet első ismert alakja, aki geometriai állításait bebizonyította, míg az első letisztult bizonyítási eljárás az elemi filozófiai iskola által kidolgozott indirekt bizonyítás, melynek leghíresebb művelője Arkhimédész volt. Ez abból indul ki, hogy egy állítás és annak tagadása közül az egyiknek biztosan be kell következnie, tehát az állítás tagadásának lehetetlenségét megmutatva is eljutunk az állítás igazolásához.

A logikai bizonyítás egy állítás igazságának kimutatása más, igaznak elismert állítás(ok)ra támaszkodva. Szabatos bizonyítás esetén a kiinduló állításoknak mint premisszáknak logikai következménye a bizonyítandó állítás.

A bizonyítás megbízhatósága függ a felhasznált érvek (premisszák) megbízhatóságától és a bizonyítás során alkalmazott logikai lépések szabatosságától. A matematikai logika esetén az előbb említett logikai lépések minden esetben szabatosak.

3.3.2 A matematikai logika

A történeti ismeretek birtokában tudjuk, hogy a logikának, így a matematikai logikának is egyik lényeges célja a helyes következtetések feltárása, de mivel foglakozik ezen kívül? A kérdésre adott válaszként tekintsük át pontosan a matematika logika fogalmát!

A matematikai logika a matematika egyik kiemelt ága, elsősorban a matematika megalapozásával foglalkozik, a matematikai fogalomalkotások jogosságát, azok tulajdonságait matematikai eszközökkel vizsgálja.

Fontosabb ágai: bizonyításelmélet, modellelmélet, rekurzióelmélet és időként ide sorolják a halmazelméletet is. Világossá váltak a matematika logika területei. Ezek közül csak a halmazelmélet és a bizonyításelmélet alapjaival ismerkedünk meg a következőkben.

3.3.3 A kijelentés

A nyelvhasználat alapvető funkciója az információ közlése, befogadása és feldolgozása, ami a közös emberi tevékenységek összehangolásához elengedhetetlenül szükséges. A humán információközlés egységeit a logikában állításnak vagy kijelentésnek mondjuk. Egy állítás nyelvi kifejezési formája, grammatikai egysége a kijelentő mondat.

A nyelvek sokfélesége miatt és a köznapi beszéd használatánál a félreértés veszélye miatt a matematikában sokkal inkább áttértek arra, hogy a kijelentéseket mesterséges, formális nyelven fejezzék ki, amely a köznapi nyelvnek csak logikai szempontból jelentős elemeit tartalmazza. A tananyag mélyebb tárgyalását kezdjük a kijelentés fogalmának tisztázásával.

Kijelentés (állítás, ítélet) minden olyan jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondat, amely – legalábbis a tárgyaláson belül – vagy igaz, vagy hamis, de egy időben nem lehet igaz és hamis is.

Példa:
Állapítsuk meg, hogy kijelentések-e a következő mondatok?
a) Mátyás király igazságos volt.
b) Hazánkban Magyarepresen található minaret.
c) IV. Antal magyar királynak két fia volt
d) A felsőoktatási intézmények könyvtáraiban vannak lexikonok.
e) Süt a nap.

Megoldás:
a) kijelentés, mert fenti királyról tudjuk, hogy létezett
b) nem kijelentés, mert nincs alanya a mondatnak, ugyanis nincs Magyarepres település hazánkban
c) nem kijelentés, mert nincs alanya a mondatnak, hiszen a történelmi tanulmányaink alapján kijelenthetjük, hogy ilyen királyunk nem volt.
d) kijelentés.
e) nem kijelentés, mert nem egyértelmű, hogy milyen földrajzi területre, milyen időintervallumra vonatkozik az állítás, stb., és emiatt nem állapítható meg, hogy igaz vagy hamis, illetve ennek eldöntéséhez további információkra lenne szükség.

A formális nyelv alkalmazása azzal kezdődik, hogy magát a kijelentés fogalmát precízen meg kell határozni, amit az imént megtettünk. Általában azt követeljük meg, hogy a kijelentéseket az igaz és hamis kijelentések osztályába lehessen szétosztani (a kétértékűség elve). Így a kijelentés minden szóban vagy írásban kifejezett képződmény, amelyhez vagy az igaz (i) vagy a hamis (h) igazságérték tartozik. Itt nem játszik szerepet, hogy az igazságértéket milyen módon határozzuk meg.

Példa:
Állapítsuk meg a kijelentések logikai értékét!
a) Mátyás király igazságos volt.
b) A felsőoktatási intézmények könyvtáraiban vannak lexikonok.
c) A 2010/11-es tanév utolsó vizsganapján Egerben nem esett az eső.
d) Volt a 20. században Sirokon egyetem.

Megoldás:
a) igaz
b) igaz
c) kijelentés ugyan, de csak akkor tudjuk megállapítani a logikai értékét, ha már az adott elmúlt, és a feljegyzésekből kikeressük (esetleg mi magunk jegyezzük le).
d) hamis

A matematika számára csak a kijelentések fontosak, ezért kézenfekvő, hogy a terjedelmes (magyar nyelvű) leírás helyett valamilyen rövid formában tükrözze vissza azokat, tehát a logikai értékhez hasonlóan a kijelentéseket is egyedi módon jelöljük.

A kijelentések jelölése p, q, r, …, x, y, z, … betűkkel történik, és ezeket a betűket kijelentésváltozóknak nevezzük.

Példa:
Jelöljük az alábbi kijelentéseket különböző kijelentésváltozókkal!
a) Egy Pest megyei község: Kosd.
b) Vysoké Tatry a Magas Tátra szlovák elnevezése.

Megoldás:
a) jelöljük p kijelentésváltozóval (a Pest miatt egyszerűbb megjegyezni) a kijelentést.
– jelöléssel: p:=Pest megyei község Kosd
– olvasva: p (kijelentésváltozó) legyen egyenlő „Pest megyei község: Kosd”.
b) jelöljük v kijelentésváltozóval (a kezdőbetű miatt egyszerűbb megjegyezni) a kijelentést
– jelöléssel: v:=Vysoké Tatry a Magastátra szlovák elnevezése
– olvasva: v (kijelentésváltozó) legyen egyenlő „Vysoké Tatry a Magas Tátra szlovák elnevezése”.

3.3.4 Az Arisztotelészi alapelvek

Már az ókorban, a logika atyjának tekintett görög filozófus, Arisztotelész megfogalmazott törvényeket, az úgynevezett arisztotelészi alapelveket. Ezek az alapelvek a matematika logika jelen tárgyalásánál is alapul szolgálnak.

Az Arisztotelészi alapelvek: ellentmondástalanság elve és a harmadik kizárásának elve.

Az ellentmondástalanság elve szerint egy kijelentés egyidejűleg nem lehet igaz is és hamis is.

A harmadik kizárásának (kizárt harmadik) elve értelmében, ha egy kijelentés nem igaz, akkor hamis, és harmadik lehetőség nincs.

Tehát az arisztotelészi elvek alapján a kijelentéseknek egyértelmű logikai értéke van, amit a tapasztalat vagy a szaktudomány dönt el. Megvizsgálva a leírtakat feltűnhet, hogy ezeket az alapelveket a kijelentés fogalmának kialakításánál már használtuk. Az Arisztotelészi alapelvek és a kijelentés definícióját figyelembe véve érdemes rögzíteni, hogy sohasem tekinthető kijelentésnek a kérdő és a felkiáltó, óhajtó, felszólító mondat, és nem kijelentés a definíció sem. A kérdő, felkiáltó, óhajtó, felszólító mondat és a definíció ugyanis nem tartalmaz logikai ítéletet.

Például, az „Egy 2-vel osztható egész számot páros számnak nevezünk.” mondat nem kijelentés, de „Minden páros szám osztható 2-vel.” egy igaz kijelentés. A „Most nem mondok igazat.” mondat nem kijelentés, mert ellentmondásos, ha ugyanis ez igaz lenne, akkor nem mondanék igazat, tehát mégsem lenne igaz, ha pedig az állítás hamis lenne, akkor igazat mondanék, tehát az állítás igaz lenne.

Fontos tudni, hogy annak eldöntése, hogy egy kijelentő mondat kijelentés-e, és hogy ez esetben mi a logikai értéke, nem a logika feladata. Ez konkrét tapasztalattal, vagy valamely szaktudomány eredményeivel dönthető el, vagy bizonyos esetekben megállapodás kérdése.

Példa:
Állapítsa meg, hogy kijelentések-e a következő mondatok!

a) Nyitva van még a könyvtár?
b) Bárcsak vége lenne már a vizsgaidőszaknak!
c) Magyarország fővárosa Esztergom.
d) A bibliográfia több jelentésű szó, az egyik értelmezés szerint egy konkrét kérdés tanulmányozásához szükséges, az elérhető összes forrásmunka jegyzéke.
e) 2010-ben Heves megyében található hazánk legmagasabb pontja (Kékes).
f) Legyen szíves várni egy pillanatot!
g) Mennyi ember volt a gépteremben tegnap délután!

Megoldás:

a) nem kijelentés, mert kérdés.
b) nem kijelentés, mert óhajtó mondat.
c) nem kijelentés, mert nem egyértelmű, hogy milyen időintervallumra vonatkozik az állítás, ezért nem állapítható meg, hogy igaz vagy hamis. A logikai érték eldöntéséhez további információkra lenne szükség.
d) nem kijelentés, mert definíció.
e) kijelentés, mert egyértelmű a földrajzi terület, az időintervallum, így megállapítható, hogy igaz vagy hamis.
f) nem kijelentés, mert felszólító mondat.
g) nem kijelentés, mert felkiáltó mondat.

3.3.5 A logikai érték

A kijelentések igaz vagy hamis tulajdonsága már megjelent az előbbiekben, most határozzuk meg pontosan pontosabban!

Logikai értéknek nevezzük a kijelentések igaz, illetve hamis tulajdonságát. A p kijelentés logikai értékét |p| -vel jelöljük. Az igaz logikai értéket i betűvel vagy az 1 számjeggyel, míg a hamis logikai értéket h betűvel, illetve 0 számjeggyel jelöljük. Tehát |p|=i, ha p kijelentés igaz, és |p|=h, ha p kijelentés hamis.

Példa:
Állapítsa meg az alábbi kijelentések logikai értékét!
a) Mátyás király 1458-tól haláláig, 1490-ig uralkodott.
b) Hazánkban Budapesten, Egerben, Érden és Pécsett található minaret.
c) Az egri várvédők sohasem nyertek csatát.
d) A felsőoktatási intézmények könyvtáraiban vannak lexikonok.

Megoldás:
a) igaz, ha a történeti feljegyzésekben ellenőrizzük.
b) hamis, hiszen Budapesten nincs minaret.
c) hamis, amit tanulmányaink bizonyítanak.
d) igaz, hiszen az ismereteink szerint ez nem lehet másként.

3.3.6 Többértékű logikák

A leírtakon kívül léteznek az ún. többértékű logikák is, de azokkal a tananyagban nem foglalkozunk mélyebben. Az érdekesség kedvéért kitekintésként néhány gondolat szerepeljen itt a nem kétértékű logikákról.

Adott tudományokban, – mint például a műszaki, a vegyészeti vagy a fizikai tudományokban – egzakt matematikai modelleket építenek fel a tapasztalati jelenségek megfigyelésére alapozva, majd ezeket a modelleket használják fel a valós dolgok jövőbeni viselkedésének meghatározására.

A valós világ jelenségeinek működése azonban többnyire bizonytalan, egzakt mértékrendszerrel nem jellemezhető. A fizikai jelenségek szigorúan kétértékű megközelítése ezért nem mindig alkalmas a valóság megfelelő leírására. A valós világban dominánsak a nagy bonyolultságú rendszerek, így a számítógépes modellezésükhöz szükség van valamilyen matematikai leírásra, amely lehetővé teszi a pontatlan körülmények kezelését. Ezen leírások egyike a napjainkban egyre nagyobb szerepet játszó „fuzzy logika”.

Bár a fuzzy logika, illetve első megfogalmazásban az ezzel algebrailag azonos struktúrájú fuzzy halmazelmélet először 1965-ben került megfogalmazásra, előzményei az ókori görög logika paradoxonjaihoz nyúlnak vissza.

Ismert probléma a következő. Ha egy kupac homokból egy homokszemet elveszünk, az továbbra is egy kupac homok marad. Mivel minden homokkupac véges számú homokszemből áll, ennek a műveletnek a véges számú ismétlésével a homokkupac teljesen eltűnik, azaz a következő nyilvánvalóan hamis állításhoz jutunk: egy kupac homok = semmi. A probléma megoldása részben lehetséges a huszadik század 20-as éveitől kezdve intenzíven kutatott többértékű logikák segítségével.

A fuzzy logika

A fuzzy logika gondolatát először Lotfi A. Zadeh vetette fel 1965-ben. Az első „éles” ipari alkalmazás egy cementégető-kemence volt Dániában, 1975-ben kezdett működni. Ma már például a háztartási készülékekben, széles körben alkalmazzák a fuzzy rendszereket. Készült már – és kereskedelmi forgalomban kapható – fuzzy elven vezérelt „intelligens” porszívó, mosógép, videó kamera.

De mi is az a fuzzy logika és a fuzzy halmaz? Első pillanatban bizonytalan, kevéssé precíz válaszokat lehet erre a kérdésre adni, éppen olyanokat, mint amit ez a fogalom maga is takar. A fuzzy szó jelentése többek mellett: homályos, elmosódott. Alapvetően a fuzzy logika egy pontatlanság típus értékein nyugszik, mely olyan elemek csoportosításából származik, melyeknek nincsenek határozott határvonalai.

Ilyen csoportok (fuzzy halmazok) jöhetnek létre, valahányszor kétértelműséget, bizonytalanságot írunk le matematikai modellek segítségével.

A hétköznapokban a fuzzy halmazok részei életünknek. Érezzük mit jelent a másik barátsága, mennyire nevezhető a mai nap szerencsésnek, milyen mértékben sok a kapott ösztöndíj. Ezeket a hétköznapi tapasztalatokat nem tudjuk a matematikai logika és halmazelmélet élesen elhatárolt halmazaival, kétértékű válaszaival leírni. A fuzzy halmazok elmélete a hétköznapi tapasztalatokat akarja a matematika nyelvén megfogalmazni. Az elmosódott határú halmazok bevezetése lehetővé teszi a minőségi alapokon nyugvó adatfeldolgozást és szabályozást.

> Tekintsünk például egy meglehetősen hétköznapi dolgot, a rántáskészítést. Ha a szakácskönyv szerint egy kevés vajon üvegesre pároljuk az apróra vágott hagymát, meghintjük egy csipetnyi liszttel, enyhén átpirítjuk, majd ízlés szerint teszünk hozzá pirospaprikát, akkor a háziasszony pontosan érti teendőit. Ugyanezt feladatul adva egy laikus férjnek, mindjárt kérdések garmadája merül fel: mennyi vaj, liszt stb. szükséges pontosan, mit jelent az, hogy enyhén átpirítva stb.

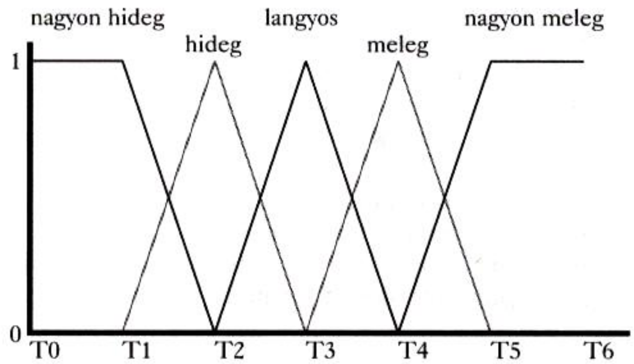
A fuzzy szabályozás képes arra, hogy minőségre vonatkozó állítások és hétköznapi tapasztalatok alapján felállított szabályok segítségével vezéreljen folyamatokat. Mindez a klasszikus, kétértékű logika éles határú halmazainak fogalmaival szembeállítva világítható meg a legjobban.

A klasszikus halmazok definíció szerint meghatározott elemek együttesei, és minden egyes elemről egyértelműen eldönthető, hogy az adott halmazhoz tartozik-e, vagy sem. Más szóval, egy elem adott halmazhoz tartozásának mértéke pl.: 0 (nem tartozik hozzá), vagy 1 (hozzátartozik) lehet. Ezzel szemben a fuzzy halmazok esetében a halmazhoz tartozás mértéke tetszőleges 0 és l közé eső szám lehet. A fuzzy logika az emberi „nem pontos” logika egzakt matematikai leírását kívánja megadni.

> Példa:
> Tekintsük az iskolát és a tantárgyak kedveltségét. Tételezzük fel, hogy valaki megkérdezi, hogy melyek az igazán kedvelt tantárgyaink. Ha a válaszadó a klasszikus halmazok nyelvén óhajt válaszolni, nehéz helyzetbe kerül, hiszen középút, vagyis „kicsit igazán kedvelem”, a klasszikus logika szerint nincs. Sokkal könnyebb a helyzet, ha a válaszadás a fuzzy halmazok nyelvén történik.

Egy másik példával is érzékeltetjük, hogy a fuzzy halmazok a hagyományos, éles határok halmazoknak az átlagos emberi gondolkodásmódhoz jobban illeszkedő általánosításai.

Példa:
Egy melegház számítógéppel vezérelt fűtő-öntöző berendezése döntéseit a hőmérséklet, páratartalom és más rendszerváltozók alapján hozza meg. A hőmérsékletváltozó felosztható több állapotra: nagyon hideg, hideg, langyos, meleg, nagyon meleg. Azonban az egyik állapotból a másikba való átmenetet nehéz meghatározni.
Egy önkényes küszöb felállítható, mely elválasztaná a „meleg" és „nagyon meleg" állapotokat, de ez egy nem folyamatos változást eredményezne, amikor a bemenet átmegy ezen a küszöbön.
Ennek kiküszöbölésére az állapotokat fuzzyvá kell tenni, azaz lehetővé tenni, hogy fokozatosan változzanak az egyik állapotból a másikba. A bemeneti hőmérsékletállapotokat tagsági függvényekkel lehet definiálni, például a 7. képen látható módon.



7. kép A hőmérsékletállapotok kifejezése tagsági függvényekkel

Így a bemeneti változó állapota nem ugrik hirtelen az egyik állapotból a másikba, hanem értéke fokozatosan csökken az egyik tagságban, míg a következőben értéket nyer.
Minden időpillanatban a hőmérséklet igazságértéke két tagsági függvény valamilyen fokú értékeivel lesz egyenlő: 0,6 langyos és 0,4 meleg, vagy 0,7 langyos és 0,3 hideg stb.
Egy fuzzy szabályozási rendszerben a bemeneti változók legtöbbször ehhez hasonló tagsági függvénykészletekre, fuzzy készletre vannak leképezve.

3.3.7 Logikai szimbólumok, jelölések

A tudományok sajátos nyelvet használnak eredményeik leírására. A matematika minden más tudományhoz hasonlóan rá van utalva, hogy eredményeit szóban és írásban megfogalmazza. A nyelvek sokfélesége miatt és a köznapi beszéd használatánál a félreértés veszélye miatt a matematikában sokkal inkább áttértek arra, hogy a kijelentéseket mesterséges, formális nyelven fejezzék ki, amely a köznapi nyelv csak logikai szempontból jelentős elemeit tartalmazza.

Sajnos a szimbolika még hazánkban sem egységes, ezért fontos tisztáznunk a jegyzetben használt logikai szimbólumrendszert, tudnunk kell, mit jelentenek és hogyan ejtjük pontosan a használt szimbólumokat. Az itt látható jelölés a jegyzetben egységes, minden esetben ugyanazt a jelölést használjuk.

1. *Táblázat Logikai szimbólumok*

Elnevezés	**Jel**	**Olvasása**
definiáló egyenlőség	:=	legyen egyenlő
nem egyenlő	$\neq$	nem egyenlő
kijelentésváltozó	p, q, r, …	p kijelentés
p kijelentés logikai értéke	|p|	p (logikai) értéke
igaz	i vagy 1	igaz
hamis	h vagy 0	hamis
egzisztenciális kvantor	$\exists$	létezik
univerzális kvantor	$\forall$	minden
következtetés jele	$\models$	következik
negáció	⌉	negáció, negát, negálva
konjunkció (AND)	$\wedge$	konjunkció, és
diszjunkció (OR)	$\vee$	diszjunkció, (megengedő) vagy
implikáció	$\rightarrow$	implikáció
ekvivalencia	$\leftrightarrow$	ekvivalencia
antivalencia (XOR)	$\oplus$	kizáró vagy
Sheffer-féle művelet (NAND)	|	Sheffer-féle művelet, vagy (?)
sem-sem (NOR)	$\downarrow$ vagy ||	Webb-féle művelet, sem… sem…
eleme	$\in$	eleme
nem eleme	$\notin$	nem eleme
adott elemekből álló halmaz	{a, b, …}	a, b, … elemek halmaza
azon x elemek halmaza, melyre	{x|…}	x, melyre … teljesül
üres halmaz	$\emptyset$	üres halmaz
részhalmaz	$\subset$	részhalmaza
valódi részhalmaz	$\subseteq$	valódi részhalmaza
metszet	$\cap$	metszet
unió	$\cup$	unió
különbség	\	különbség
szimmetrikus különbség	Δ	szimmetrikus különbség
komplementer	~H vagy $\overline{H}$	H halmaz komplementere

3.3.8 Feladatok

1) Kijelentések-e a következő mondatok? (Indokoljuk állításunkat!)
   a) Budapest Magyarország fővárosa 2010-ben.
   b) Hány óra van?
   c) 3 nagyobb, mint 2.
   d) A tanárunk szigorú.
   e) Bár vakáció lenne!
   f) Ákos nem szemüveges fiú.

2) Állapítsa meg, hogy kijelentések-e a következő mondatok! Indokolja válaszát!
   a) Sokáig tart még az út?
   b) Bárcsak jeles lenne a zárthelyi dolgozatom!
   c) Magyarország fővárosa Tiszafüred.
   d) Három kisebb négynél.
   e) A könyvtárak kulturális intézmények.
   f) Legyen szíves aláírni!
   g) De megszúrtam a kezem!

3) Jelöljük az alábbi kijelentéseket különböző kijelentésváltozókkal!
   a) 1932-ben, Cserépfalu határában, a Subalyuk-barlangban neandervölgyi ember leleteket találnak: egy gyermek koponyáját, egy nő állkapcsát és néhány töredékes vázcsontját.
   b) A Német Szövetségi Köztársaság (NSZK) 1955-ben a NATO tagja lett.

4) Állapítsuk meg a kijelentések logikai értékét!
   a) A Tisza-tó egy mesterséges tó.
   b) Karácsony január 1-jén van hazánkban.
   c) 1939. április 11-én Magyarország kilép a Nemzetek Szövetségéből.
   d) Nullánál nincs nagyobb egész szám.

3.4 ÖSSZEFOGLALÁS

A matematikához kapcsolódó, a tananyag tárgyalása és a későbbi bizonyítások alapjául szolgáló fogalmakat, valamint a matematikai logika megértéséhez elengedhetetlenül szükséges fogalmakat ismerhettük meg. Megismertük az arisztotelészi alapelvek mellett az egy és a több értékű logikát. Ezen túl összefoglaltuk a tananyagban alkalmazott összes jelölést, amit útmutatóként érdemes a tanulás és a feladatok megoldása során kezelni.

3.5 ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1) Mit értünk logikai értelemben kijelentés alatt?
2) Mit értünk egy kijelentés logikai értékén?
3) Fogalmazzuk meg az ellentmondástalanság és a harmadik kizárásának az elvét!

4. LOGIKAI MŰVELETEK

4.1 CÉLKITŰZÉS

A matematikai és a logikai művelet fogalmának megismerése. A logikai műveletek, mint a negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció és ekvivalancia megértése, és a logikai műveletek tulajdonságainak bizonyítási igényű elsajátítása.

4.2 TARTALOM

4.3 A TANANYAG KIFEJTÉSE

A matematika tárgyalásához hozzátartoznak az alapfogalmak, tételek és azok matematikai bizonyítása. Mivel a matematikai logika tárgyalása ezen az alapon történik, a fogalmak megismerése segít abban a törekvésben, hogy a tananyag komolyabb matematikai erőfeszítés nélkül is feldolgozható legyen. A tárgyaláshoz nem nélkülözhetjük a matematikai logika alapfogalmait sem, valamint a további leckék kiindulópontját, a logikai műveleteket.

4.3.1 A matematikai művelet

A logikai műveletek tárgyalása előtt a matematikai művelet fogalma következik, melynek segítségével áttekinthető a tárgyalt logikai műveletek néhány általános érvényű jellemzője.

A matematikai művelet a halmaz egy, két, vagy több eleméhez a halmaz egy elemét hozzárendelő szabály. Attól függően, hogy a halmaz hány eleméhez rendelünk szabályt beszélünk egy-, két- vagy többváltozós műveletről. (A halmaz valamely algebrai struktúrán értelmezett.)

Az algebrában leggyakrabban egy- és kétváltozós műveletek fordulnak elő, de tetszőleges számú változóra (argumentumra) definiálható matematikai művelet pl. az igazságfüggvények közül a többtagú konjunkció.

Példa:
Az algebrai műveletek (illetve ezen belül az alapműveletek) közül az összeadás két számhoz a két szám összegét rendeli, így ez kétváltozós műveletnek tekintendő.
A 3×2 szorzásnál a valós számok halmazának két eleméhez rendeljük azok szorzatának értékét, tehát a szorzás szintén kétváltozós művelet.
Egyváltozós művelet pl. a későbbiekben tárgyalt negáció művelete.

A műveletek leggyakrabban operandusokból (pl.: a, b, x, y, P, Tx…), operátorokból (pl. +, -, ×…) és zárójelekből állnak. A matematika számos területén nagy jelentősége van az egyes matematikai művelet-típusoknak, így beszélhetünk többek között halmazműveletekről, logikai műveletekről stb.

A matematikai műveletek aszerint is vizsgálhatók, hogy teljesülnek-e rájuk bizonyos tulajdonságok: asszociativitás, disztributivitás, kommutativitás, idempotencia.

Asszociativitás (csoportosíthatóság). Egy több operátort tartalmazó művelet asszociatív, ha a végrehajtás során tetszőleges operátor lehet a kezdőművelet az eredmény megváltozása nélkül, azaz az operandusokat tetszőlegesen csoportosíthatom.

Példa:
a) Az összeadás asszociatív, mivel tetszőlegesen választhatom meg azt az operátort (+), ahol az összeadást kezdem. Jelekkel, ha a, b, c tetszőleges operandusok:
(a+b)+c = a + (b+c), azaz
ha pl. a=3, b=7, c=23, akkor 10+23 = 3 + 30 (=33)

b) Az osztás nem asszociatív, mivel nem választhatom meg azt az operátort (+), ahol az osztást kezdem. Jelekkel, ha a, b, c tetszőleges operandusok:
(a/b) / c ≠ a / (b/c), azaz
ha pl. a=60, b=10, c=2, akkor 6/2 ≠ 60/5

Kommutativitás (felcserélhetőség). Egy művelet kommutatív, ha bármely operátorhoz tartozó két operandust felcserélhetjük az eredmény megváltozása nélkül, azaz a műveletek végrehajtási sorrendje tetszőleges.

Példa:
a) Az összeadás kommutatív, mivel az operátorhoz (+) tartozó operandusokat felcserélhetem. Jelekkel, ha a, b tetszőleges operandusok:
a+b = b + a, azaz
ha pl. a=3, b=7, akkor 3 + 7 = 7 + 3 (=10)

b) A kivonás nem asszociatív. Jelekkel, ha a, b, c tetszőleges operandusok:
a-b ≠ b-a, azaz
ha pl. a=3, b=7, akkor 3 – 7 ≠ 7 – 3

Idempotencia (azonos hatványúság). Egy művelet idempotens, ha ugyanazzal az operandussal a műveletet bármennyiszer végrehajtva mindig önmagát az operandust kapjuk eredményként.

Példa:
a) Az egy kitevőjű hatványozás idempotens. Jelekkel, ha a tetszőleges operandus:
$(a^1)^1 = a$, azaz
ha pl. a=10, akkor $(10^1)^1 = 10$

b) Az összeadás nem idempotens. Jelekkel, ha a tetszőleges operandus:
$a+a \neq a$, azaz
ha pl. a=3, akkor $3 + 3 \neq 3$

Disztributivitás (széttagolhatóság). Két művelet esetén a zárójelben lévő művelet a zárójel előtt vagy mögött álló művelettel széttagolható úgy, hogy az értéke nem változik. A tagolás lépései: a zárójelben lévő operandusokat rendre a zárójelen kívüli operandussal és a zárójelen kívüli művelettel kötjük össze. az így keletkezett műveleteket a zárójelben lévő művelettel kötjük össze.

Példa:
a) A szorzás az összeadásra nézve disztributív. Jelekkel, ha a, b, c tetszőleges operandusok: $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$, azaz
ha pl. a=5, b=2, c=8, akkor $5 \times 10 = 10 + 40$ (=50)

a) Az összeadás a szorzásra nézve nem disztributív. Jelekkel, ha a, b, c tetszőleges operandusok: $a + (b \times c) \neq a+b \times a+c$, azaz
ha pl. a=5, b=2, c=8, akkor $5+16 \neq 5 + 10 + 8$

4.3.2 Logikai műveletek

Tekintsük a következő kijelentéseket!
1) 2 páros szám és 2 osztója 16-nak.
2) 5 primszám (csak az 1 és önmaga az osztója) és 5 osztója 13-nak.
3) 3 osztója 18-nak, mert 3-nak 6-szorosa 18.
4) 3 osztója 18-nak, mert 5 pozitív szám.

Az első kijelentés a 2 páros szám, valamint a 2 osztója 16-nak kijelentéseknek (mint komponenseknek) az „és” kötőszóval történő összekapcsolása útján keletkezett. A komponensek logikai értéke igaz, és igaznak tartjuk az 1) összetett kijelentés logikai értékét is.

Ha két kijelentést az és kötőszóval kapcsolunk össze, akkor az így keletkezett összetett kijelentés logikai értékét – a megszokással összhangban – pontosan akkor tekintjük igaznak, ha mind a két komponens logikai értéke igaz.

Ennek megfelelően a 2) kijelentés logikai értéke hamis, mert – bár azonos szerkezetű az első kijelentéssel – az egyik komponens logikai értéke igaz, a másiké hamis.

Az 1) és 2) kijelentés logikai értékét tehát a komponensek logikai értéke egyértelműen meghatározza.

A 3) és 4) kijelentés két egyszerűbb kijelentésnek a „mert” kötőszóval történő összekapcsolásával keletkezett. Komponenseik logikai értéke igaz és igaznak tartjuk a 3) kijelentést is. Azt azonban mégsem mondhatjuk józan ésszel, hogy a 3 azért osztója 18-nak, mert 5 pozitív szám, ahogy azt a 4) kijelentésnél olvastuk.

Elmondhatjuk, hogy a 3) és 4) kijelentés logikai értékét a bennük szereplő egyszerűbb kijelentések logikai értékei nem határozzák meg egyértelműen.

A műveletekre ezt a korlátozást – amelyet értékelési alapelvnek nevezünk – a logika matematikai módszerekkel történő vizsgálata során (a matematikai logikában) vezették be. Az elmondottakból kitűnik, hogy a logikai műveleteket a kijelentések között egy vagy több kijelentésre értelmezhetjük.

Logikai műveletről akkor beszélünk, ha adott kijelentésekből úgy épül fel egy összetett kijelentés, hogy annak logikai értékét az adott kijelentések (komponensek) logikai értékei egyértelműen meghatározzák.

A logikai műveletek röviden a kijelentések között értelmezett matematikai műveletek. A logikai műveletek fogalma alapján az 1) és 2) kijelentés logikai művelettel keletkezett összetett kijelentés, a 3) és 4) nem logikai művelettel keletkezett összetett kijelentés. A továbbiakban a leginkább használt logikai műveleteket értelmezzük, kitérünk azok legegyszerűbb tulajdonságaira is.

4.3.3 A logikai kifejezés. A kijelentések formulája

Az alapfogalmaknál a kijelentést, míg az előzőekben logikai művelet definícióját ismertük meg, de nyilvánvaló, hogy a kijelentéseket a műveletekkel szeretnénk összekapcsolni. Kijelentésekből tehát azok logikai műveleteivel összetett kijelentéseket képezhetünk. Egy összetett kijelentés kijelentéslogikai szerkezetén (pontosítva: „durva” szerkezetén) annak az ábrázolását értjük, hogy az összetett kijelentés milyen más kijelentésekből és milyen műveletek segítségével írható fel.

A logikai kifejezés alatt a kijelentések logikai változóinak és a logikai műveletek együttesét értjük.

A logikai kifejezéseket a matematikai logika jelölésrendszerével leírva ún. formulákat kapunk.

A kijelentéslogikai formulák a kijelentésváltozókból (p, q, r,…), műveleti jelekből és zárójelpárokból épülnek fel.

A logikai műveleti jeleknek is van egy speciális elnevezése.

Logikai konstansoknak nevezzük a logikai műveleti jeleket ($\rceil$, $\vee$, $\wedge$,...).

A kifejezés és a formula között a különbség tehát annyi, hogy a kifejezés az élő nyelv korlátozott, a logika által engedett eszközeit használva, míg a formulák ugyanazt röviden, szimbólumokkal írják le. A két fogalmat gyakran használják egymás szinonimájaként is.

Példa:
Kedvelem a barátaimat és utálom a hideget.
A két kijelentéshez rendeljük a következő változókat:
b:= kedvelem a barátaimat

h:= utálom a hideget
A két kijelentést a hamarosan részletezett „és” művelet kapcsolja össze, a jele: ∧.
A táblázat első sorában látjuk a logikai kifejezést, míg a második sora annak a kijelentéslogikai formuláját tartalmazza:

Kedvelem a barátaimat	és	utálom a hideget.
b	∧	h

4.3.4 A negáció

A köznapi beszédben gyakran fordul elő egy kijelentés tagadása, amit legtöbbször a nem tagadószóval teszünk, pl.: „Nem igaz, hogy nehéz a nyelvvizsga.” A „Nem igaz, hogy” kezdetű mondatok az eredeti kijelentés logikai értékét ellentétesre változtatják. A beszédben tetten érhető jelenséget a logikában negációnak nevezik. Bármely kijelentésből képezhetünk egy újabb kijelentést a következő definíció szerint.

Tetszőleges p kijelentés negációján (tagadásán) a „Nem igaz, hogy p” kijelentést értjük és]p-vel jelöljük. A „nem igaz, hogy p” mellett szokásos használni a „nem p” rövidebb megfogalmazást is.

Példák:
1) A 17 pozitív szám.
A kijelentés negációja:
Nem igaz, hogy a 17 pozitív szám.
A 17 nem pozitív szám.
2) Zsuzsa barátja Tamás.
A kijelentés tagadása:
Nem igaz, hogy Zsuzsa barátja Tamás.
Zsuzsának nem barátja Tamás.
Nem Zsuzsa barátja Tamás.
Tamás nem barátja Zsuzsának.
3) Mindenki szereti a logikát.
A kijelentés negációja:
Nem igaz, hogy mindenki szereti a logikát.
Nem mindenki szereti a logikát.
Van aki nem szereti a logikát.

A példákból kitűnik, hogy egy kijelentés tagadása többféleképpen is megfogalmazható.

A p kijelentés tagadásának a logikai értéke:

$$|\rceil p| := \begin{cases} i, ha\ |p| = h \\ h, ha\ |p| = i \end{cases}$$

(A leírtakat a következőképpen olvassuk: nem p logikai értéke (legyen) igaz, ha p logikai értéke hamis, illetve (legyen) hamis, ha p logikai értéke igaz.)

A negáció logikai művelet, mert a p kijelentés logikai értéke egyértelműen meghatározza ⌉p kijelentés logikai értékét.

A negáció logikai értéktáblázattal ábrázolva:

|p|	|⌉p|
i	h
h	i

Megjegyezzük, hogy a műveletet és annak eredményét is negációnak nevezzük, valamint azt, hogy a negáció nem a kijelentést változtatja ellenkezőjére, hanem annak logikai értékét. Hangsúlyozzuk, hogy a magyar nyelv a mondat tagadását általában az állítmány tagadásával végzi.

Például:
A szobám fala fehér. Ennek a kijelentésnek a tagadása: A szobám fala nem fehér. Lehet, hogy zöld vagy sárga, de egyáltalán nem biztos, hogy pl. fekete.

A p kijelentés tagadásának (⌉p) is képezhetjük a negációját. Ezt a p kijelentést kétszeres tagadásnak nevezzük és ⌉⌉p-vel jelöljük. A p és a ⌉⌉ p kijelentések nyelvileg nem azonosak, de a kijelentések negációja logikai értékének az értelmezése szerint írhatjuk, hogy |p| = |⌉⌉p|. Mind a mindennapi, mind a tudományos életben találkozunk kétszeresen tagadott kijelentésekkel.

Példa:
1) Nem igaz, hogy az órám nem jár pontosan.
2) Nem igaz, hogy 6 nem osztható 2-vel.

A természetes nyelvben a tagadás használata igen sokféle lehet, van olyan eset is, amikor nem fejezi ki a „nem” tagadószó a negációt. A példában tagadjuk az állítmányt, így valóban kifejezzük a negációt:

Példa:
Péter magasabb, mint Pál.
Péter nem magasabb, mint Pál.

A nyelvben vannak olyan esetek, amelyekről majd csak a prédikátumlogikában tanulunk, de a példákat már itt is érdemes megvizsgálni. A második példában a „nem” szó nem jelent negációt, mivel mindkét állítás igaz:

Példa:
Némelyik emlős tud repülni. (igaz)
Némelyik emlős nem tud repülni. (igaz)

Tagadjuk kétféleképpen is az alábbi mondatot, de a harmadik példa is azt mutatja, hogy egyik sem negáció:

Példa:
Minden ember hazudik. (hamis)
Egyetlen ember sem hazudik. (hamis)
Minden ember igazat mond. (hamis, bár átfogalmaztuk)

Az előző példa negációját a következő kijelentések fejezik ki:

Példa:
Nem minden ember hazudik. (igaz)
Nem igaz, hogy minden ember hazudik. (igaz)

További gondot jelenthet az összetett mondatra alkalmazott negáció. Nem lehetünk biztosak abban, hogy melyik tagmondatra vonatkozik a negáció. Az élő nyelvben ezt jelezhetjük hangsúllyal, de a formuláknál egyértelművé teszi mindezt a zárójel.

Példa:
Nem igaz, hogy Kati csinosabb, mint Klára, és Klára csinosabb, mint Luca.
a)] (Kati csinosabb, mint Klára), és Klára csinosabb, mint Luca.
b)] (Kati csinosabb, mint Klára, és Klára csinosabb, mint Luca).

4.3.5 A konjunkció

A hétköznapi életben gyakran használt kifejezés az „és” szó. Ha például tulajdonságokat sorolunk fel, akkor azok nem tesszük ki minden tulajdonság után az „és” szót: Ági művelt, olvasott, barna hajú és magas. Kijelenthető, hogy mi voltaképpen arra gondoltunk, hogy Ági művelt és Ági olvasott és Ági barna hajú és Ági magas. Azonban a nyelv lerövidíti ezt a logikai okoskodást, viszont ebben az esetben írhatjuk fel egyszerűen a kifejezések ún. konjunkcióját.

Konjunkció fogalma. Tetszőleges p és q kijelentések konjunkcióján értjük a „p és q” összetett kijelentést, illetve ennek valamilyen átfogalmazását. Jelölése: p∧q, ahol p, q a konjunkció tagjai.

Két kijelentés konjunkciójának logikai értékét a következőképpen értelmezzük:

$$|p \land q| := \begin{cases} i, ha\ |p| = |q| = i, \\ h\ egyébként \end{cases}$$

A definíció értéktáblázattal:

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|p \land q\|$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A definíció négyzetes értéktáblázatba foglalva:

		q	
	$\wedge$	i	h
p	i	i	h
	h	h	h

Az értelmezésből látható, hogy két kijelentés konjunkciójának logikai értékét a komponensek logikai értékei egyértelműen meghatározzák, azaz a konjunkció logikai művelet. Konjunkciónak szoktuk nevezni a művelet eredményét is. Tekintsük a következő példákat!

Példa:
1) Az a oldalú négyzet területe a·a és kerülete 4·a.
2) 5 pozitív és páratlan szám.
3) A 6. osztály első lett a tanulmányi- és második a sportversenyen.

Mind a három kijelentés logikai értéke – összhangban a köznapi nyelvvel – csak akkor igaz, ha mind a két komponens logikai értéke igaz. Természetesen a lényeg nem az „és” kötőszón van, hanem az együttes állításon, ezért az „és” helyett sokszor használjuk pl. a bár; ámbár; de; viszont; meg; noha; szintén; … is … is stb. kötőszavakat anélkül, hogy a logikai tartalom megváltozna.

Példa:
Péter is elment, Juli is elment haza. (rövidebben: Péter is, Juli is elment haza.)
Bár Péter elment, Juli itt maradt.
Esik az eső, noha süt a nap.
Füles átázott, mindazonáltal nem lett jókedvű.
Habár az ibolya elhervadt, a többi virágzik.
Felkészültem, viszont izgulok.
Gulyáslevest ettünk meg bort ittunk.

Megjegyezzük, ha egy kijelentésben az „és” kötőszó szerepel, az nem jelenti minden esetben azt, hogy a kijelentés konjunkcióval keletkezett.

Példa:
1) 3-nak és 7-nek a legnagyobb közös osztója 1.
2) 3-nak és 7-nek a legkisebb közös többszöröse 21.
3) A nappal és az éjszaka egymást követik.
4) Kriszta és Imre barátok. (másképpen: Imre barátja Krisztának)
A 4)-es példa a konjunkciót kifejező alakra átfogalmazva már mást jelentene: Kriszta barát, és Imre barát. A barát ilyen esetben szerzetest jelent és ez már valóban konjunkció.

A következő részekben szereplő tételeket „T” betűvel jelöljük, és következetesen számozni fogjuk, hogy később lehessen rájuk hivatkozni.

Az eddigi ismereteink alapján kijelenthető, hogy a modern matematika a tételeket csak akkor fogadja el helyesnek, ha a tételben szereplő állítások igaza belátható, amit bizonyításnak neveztünk. A konjunkcióhoz kapcsolódó tételek logikai értéktáblázat segítségével könnyen igazolhatók.

Kijelentés (tétel) bizonyítási lépései. Az összetett kijelentés (tétel, azonosság) igazolása a következőképpen történik:
1) meghatározzuk az egyenlőség jel bal oldalán lévő kifejezés logikai értékét minden logikai változó (p, q, r…) összes lehetséges logikai értékére.
2) meghatározzuk az egyenlőség jel másik, jobb oldalán lévő kifejezés logikai értékét minden logikai változó (p, q, r…) összes lehetséges logikai értékére.
3) Ha a bal és a jobb oldali kifejezés logikai értékei minden esetben (az igazságtáblázat minden sorában) megegyeznek, akkor a kijelentést (tételt, azonosságot) beláttuk, azaz bebizonyítottuk.
4) Ha csak egyetlen esetben is a bal oldali kifejezés logikai értéke eltérő a jobb oldali kifejezés logikai értékétől (az igazságtáblázat egy vagy több sorában), akkor az összetett kijelentés nem bizonyítható, tehát nem lehet sem tétel sem azonosság.

Összefoglalva a bizonyítások lényegét: mivel egy változónak mindössze két értéke (igaz vagy hamis) létezik, ezért a logikai értéktáblázat felhasználásával szemléletesen, az összes lehetőség leírásával láthatók be a tételek.

Adott p, q és r kijelentésekből képezhetjük a $p\wedge q$; $q\wedge p$; $(p\wedge q)\wedge r$; $p\wedge(q\wedge r)$; $p\wedge p$; $p\wedge\rceil p$ kijelentéseket. Ezek logikai értékére teljesülnek a következő tulajdonságok:

T1: A konjunkció kommutatív: $|\, p\wedge q \,| = |\, q\wedge p \,|$

A kommutativitás igazolása:

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|p \wedge q\|$	$\|q \wedge p\|$
i	i	i	i
i	h	h	h
h	i	h	h
h	h	h	h

Mivel a harmadik és a negyedik oszlop minden sorában megegyeznek a logikai értékek, kijelenthető, hogy p, q változók minden lehetséges logikai értéke esetén az egyenlőség jel két oldala megegyezik, tehát a tételt beláttuk.

T2: A konjunkció asszociatív: $|\, (p\wedge q)\wedge r \,| = |\, p\wedge(q\wedge r) \,|$

Az asszociativitás igazolása:

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|r\|$	$\|(p \land q)$	$\land r\|$	$\|p \land$	$(q \land r)\|$
i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h	h
i	h	i	h	h	h	h
i	h	h	h	h	h	h
h	i	i	h	h	h	i
h	i	h	h	h	h	h
h	h	i	h	h	h	h
h	h	h	h	h	h	h
			1	2	2	1

Megjegyzés: a logikai műveletek sorrendjét a zárójellel befolyásolhatjuk, amit a táblázat utolsó sorában a számozással jelöltünk: 1 szerepel az elsőként végrehajtandó művelet alatt, 2 pedig a másodikként végrehajtandó művelet alatt. Ezt a segítséget a következőkben is így érvényesítjük.

A vastag kerettel jelölt, a két oldal formuláját tartalmazó logikai értékek minden sorban azonosak, tehát a tételt bebizonyítottuk.

T3: A konjunkció idempotens: $|p \land p| = |p|$

Az idempotencia igazolása:

$\|p\|$	$\|p \land p\|$
i	i
h	h

A tételt bebizonyítottuk.

T4: A konjunkcióra érvényes az ellentmondástalanság elvének tükrözése: $|p \land \rceil p| = h$.

Olvasva: p konjunkciója a önmaga negáltjával mindig hamis.

Az ellentmondástalanság elvének igazolása:

$\|p\|$	$\|p \land$	$\rceil p\|$	h
i	h	h	h
h	h	i	h
	2	1	

A tételt bebizonyítottuk.

4.3.6 A sem-sem művelet

A negáció és a konjunkció felhasználásával értelmezhetünk további logikai műveleteket is. Ezek közül egyik az úgynevezett sem-sem művelet, amelyet az alábbiak szerint értelmezünk és a || jellel jelölünk.

A sem-sem logikai művelet értelmezése:
$p \Vert q := \neg p \wedge \neg q$
A sem-sem művelet eredményének logikai értéke csak akkor igaz, ha $\lvert p \rvert = \lvert q \rvert = h$.
A sem-sem művelet logikai értéktáblázata:

$\lvert p \rvert$	$\lvert q \rvert$	$\lvert \neg p \rvert$	$\lvert \neg q \rvert$	$\lvert p \Vert q \rvert$
i	i	h	h	h
i	h	h	i	h
h	i	i	h	h
h	h	i	i	i

A definíció négyzetes értéktáblázatba foglalva:

		q	
	$\wedge$	i	h
p	i	h	h
	h	h	i

Idézzük fel a művelethez tartozó talán leghíresebb magyar mondat sorait Ady Endrétől:

Példa:
„Sem utódja, sem boldog őse,
Sem rokona, sem ismerőse
Nem vagyok senkinek,”

4.3.7 A diszjunkció

Az emberek életében igen gyakori az útelágazás. Dönteni kell, és az esetek többségében ez nem egyszerű. A döntések leírása a logikában is összetett, hiszen a beszédben sem lehet egyértelműségről beszélni.

Példa:
Vagy a fagylaltom nélkülözöm, vagy a tortát!

A mondatot többféleképpen lehet érteni, attól függően miként hangsúlyozzuk. Ha komolyan mondjuk egy diéta közepén, akkor egyszerre nem ehetjük meg a fagylaltot és a tortát, csak az egyiket, de az is lehet, hogy egyiket sem. A diszjunkció művelete is ezt jelenti. Azonban mondhatjuk szigorúan (Vagy a fagylaltom nélkülözöm, vagy tortát! Nincs tovább vita!), ami jelentheti azt is, hogy kizárólag az egyik eset történhet meg, de az mindenképpen. Az első jelentéshez kapcsolódva definiáljuk az új logikai műveletet.

Diszjunkció fogalma. Jelöljön p, q két tetszőleges kijelentést. A p és q kijelentésekkel végzett sem-sem művelet negációjaként értelmezünk egy újabb műveletet, amelyet a p, q kijelentések diszjunkciójának nevezünk. Jelölése: $p \vee q$, ahol p, q a diszjunkció tagjai.
$p \vee q := \neg(\neg p \wedge \neg q)$
Olvasása: p diszjunkciója q-val legyen egyenlő nem igaz, hogy sem p, sem q.

A sem-sem művelet logikai értékéinek figyelembe vételével a diszjunkció logikai értéktáblázatát az alábbiak szerint felírhatjuk:

A definíció értéktáblázattal:

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|p \vee q\|$	$\|]p \wedge]q\|$	$\|](]p \wedge]q)\|$
i	i	i	h	i
i	h	i	h	i
h	i	i	h	i
h	h	h	i	h

A definíció négyzetes értéktáblázatba foglalva:

		q	
	∨	i	h
p	i	i	i
	h	i	h

A diszjunkció esetében is igaz, hogy a műveletet és annak eredményét is diszjunkciónak nevezzük. Mivel a diszjunkciót negáció és konjunkció segítségével értelmeztük, ezért logikai művelet. Ez a logikai érték-táblázatból is látható.

A táblázatból az is kiolvasható, hogy a diszjunkció logikai értéke csak abban az egy esetben hamis, ha mind a két komponens logikai értéke hamis.

Többféle „vagy” létezik

A vagy kötőszót szokás megengedő, kizáró, illetve összeférhetetlenséget kifejező értelemben használni. Két kijelentés megengedő értelmű „vagy” kötőszóval történő összekapcsolása által keletkezett kijelentés akkor igaz, ha a komponensek közül legalább az egyik logikai értéke igaz, vagyis ez a diszjunkció művelete.

A „vagy” kötőszót megengedő (alternáció) értelemben (OR):

Példa:

a) Ákos matematikából vagy fizikából jelesre felelt. Elképzelhető, hogy csak matematikából, csak fizikából kapott jelest, de lehet hogy mind a két tárgyból jelesre felelt.

b) Paradicsom salátát kérek a csirkéhez vagy csalamádét. Lehet, hogy az illető paradicsom salátát eszik, elképzelhető, hogy csak csalamádét, de akár mindkettőt is ehet felváltva.

Két kijelentés kizáró értelmű „vagy” kötőszóval történő összekapcsolása által keletkezett kijelentés akkor igaz, ha a komponensek közül csak az egyik, de csakis az egyik logikai értéke igaz, vagyis ez a művelete. A „vagy” kötőszót használhatjuk kizáró (antivalencia) értelemben (XOR) is.

Példa:

a) Figyel az órán, vagy kimegy. Itt a vagy kötőszó kizáró értelmű, mivel figyelni illetve elmenni egyidejűleg nem lehet, harmadik lehetőség nincs.

b) Vagy hajóval megyünk, vagy repülővel. Nyilvánvaló, csak az egyikkel utazhatunk.

A „vagy” kötőszó összeférhetetlenséget is kifejezhet.
Az összeférhetetlenséget kifejező „vagy” kötőszót (NAND- vagy Sheffer-művelet):

Példa:
a) Újságot olvasok, vagy alszok. Újságot olvasni és aludni is egyidejűleg nem lehet, de egy harmadik lehetőség nem kizárt.
b) ön dönt: iszik, vagy vezet. Nem szükséges örökké csak a vezetés meg csak az ivás állapotában lenni, lehetséges, hogy se nem iszunk, se nem vezetünk.
c) Teca, vagy csíkos blúzt veszel fel, vagy pöttyös szoknyát. Ebben a helyzetben egyáltalán nem szükséges, hogy a kettő közül valamelyik eset igaz legyen, mást is felvehet, hiszen a beszélő nyilván nem azt szándékozott kifejezni, hogy Tecának örökké csak a csíkos blúzában, vagy örökké csak a pöttyös szoknyájában kellene járnia. Csupán azt szeretné, hogy a kettőben egyszerre ne jelenjen meg.

Megjegyezzük, hogy a vagy kötőszó nem megengedő értelmű használatáról a „vagy” előtti vessző, más szerkezetben pedig a „vagy ..., vagy ...” informál bennünket.

Diszjunkció és a „vagy” kötőszó

Tekintsük az alábbi kijelentéseket:
a) Nem igaz, hogy (17 se nem pozitív, se nem páratlan szám).
b) 3 osztója 6-nak vagy Zsuzsa jeles tanuló.
c) Nem igaz, hogy (3 nem osztója 6-nak és Zsuzsa nem jeles tanuló).

Az a) kijelentés diszjunkció, amely azt állítja, hogy 17 pozitív szám vagy a 17 páratlan szám. A vagy kötőszót megengedő értelemben használjuk. Úgy tűnik, hogy két kijelentés diszjunkciója felírható a komponenseknek vagy kötőszóval történő összekapcsolásával is. Ehhez azonban egy megjegyzést kell tenni.

A b) kijelentés a „3 osztója 6-nak”, illetve a „Zsuzsa jeles tanuló” komponenseknek „vagy” kötőszóval történő összekapcsolásával keletkezett. Ezt az összetett kijelentést nyelvileg furcsának tartjuk és nem is érezzük igaznak. A c) kijelentés a b) kijelentésben szereplő komponensek diszjunkciója, s ezt a kijelentést nyelvileg is helyénvalónak, s emellett igaznak is érezzük.

Elmondhatjuk, hogy a megengedő „vagy” kötőszóval összekapcsolt két kijelentés mindig felírható diszjunkcióként, de fordítva nem, vagyis két kijelntés diszjunkciója nem mindig fejezhető ki értelmes módon „vagy” kötőszó segítségével. Az előbbi felismerésre nézzünk egy példát!

Példa:
A c) diszjunkciót nem írhatjuk fel a b) formában.

A diszjunkció tulajdonságai

Adott p, q, r kijelentésekből képezhetjük például a $p \vee q$, $q \vee p$, $(p \vee q) \vee r$, $p \vee (q \vee r)$, $p \vee p$ kijelentéseket. Ezek logikai értékeit összehasonlítva megállapítható, hogy a diszjunkció, kommutatív, asszociatív, idempotens tulajdonságú logikai művelet. A diszjunkcióhoz kapcsolódó tételek logikai értéktáblázat segítségével könnyen igazolhatók.

T5. A diszjunkció kommutatív: |p∨q | = | q∨p |

A kommutativitás igazolása:

|p|	|q|	|p∨q|	|q∨p|
i	i	i	i
i	h	i	i
h	i	i	i
h	h	h	h

Mivel a harmadik és a negyedik oszlop minden sorában megegyeznek a logikai értékek, ezért kijelenthető, hogy p, q változók minden lehetséges logikai értéke esetén az egyenlőség jel két oldala megegyezik, tehát a tételt beláttuk.

T6. A diszjunkció asszociatív: | (p∨q)∨r | = | p∨(q∨r) |

Az asszociativitás igazolása:

|p|	|q|	|r|	|(p ∨ q)	∨ r|	|p ∨	(q ∨ r)|
i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	i	i	i
i	h	i	i	i	i	i
i	h	h	i	i	i	h
h	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	i	i	i
h	h	i	h	i	i	i
h	h	h	h	h	h	h
			1	2	2	1

Megjegyzés: a logikai műveletek sorrendjét a zárójellel befolyásolhatjuk, amit a táblázat utolsó sorában a számozással jelöltünk: 1 szerepel az elsőként végrehajtandó művelet alatt, 2 pedig a másodikként végrehajtandó művelet alatt. Ezt a segítséget a következőkben is így érvényesítjük.

A vastag kerettel jelölt, a két oldal formuláját tartalmazó logikai értékek minden sorban azonosak, tehát a tételt bebizonyítottuk.

T7. A diszjunkció idempotens: | p∨p | = | p |

Az idempotencia igazolása:

|p|	|p ∨ p|
i	i
h	h

A tételt bebizonyítottuk.

T8. A diszjunkcióra érvényes a harmadik kizárása elvének tükrözése: | p∨⌉p | = i
Olvasva: p diszjunkciója önmaga negáltjával azonosan (mindig) igaz.

A harmadik kizárása elvének igazolása:

|p|	|p ∨	⌉ p|	i
i	i	h	i
h	i	i	i
	2	1	

A tételt bebizonyítottuk.

4.3.8 A De Morgan-azonosságok

Konjunkcióval és diszjunkcióval mint logikai műveletekkel és azok tulajdonságaival külön-külön megismerkedtünk. Most olyan összefüggéseket tekintünk át, amelyekben egy logikai kifejezésben vagy egy összetett kijelentésben a konjunkció és a diszjunkció művelete egyszerre szerepel. Elsőként vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a két művelet tagadását próbáljuk meg a másik művelet segítségével leírni. Az összefüggések egy-egy azonosságot takarnak, azaz a kijelentések logikai értékétől függetlenül állandóan igazak.

De Morgan-azonosságok:
Legyen p, q két tetszőleges kijelentés.
T9. |⌉(p∧q) | = | ⌉p ∨ ⌉q |
Ezt így olvassuk: p konjunkció q negációja egyenlő a p, q negációjának diszjunkciójával.

Igazoljuk az első DeMorgan-azonosságot (T9)!

|p|	|q|	|⌉ (p∧q)|		|⌉p ∨ ⌉q|
i	i	h	i	h
i	h	i	h	i
h	i	i	h	i
h	h	i	h	i
		2	1	

Az első azonosságot beláttuk.

T10. | ⌉(p∨q) | = | ⌉p ∧ ⌉q |

Ezt így olvassuk: p diszjunkció q negációja egyenlő a p, q negációjának konjunkciójával.

Igazoljuk a második DeMorgan-azonosságot (T10)!

|p|	|q|	|⌉ (p∨q)|		|⌉p ∧ ⌉q|
i	i	h	i	h
i	h	h	i	h
h	i	h	i	h
h	h	i	h	i
		2	1	

A 2. azonosságot beláttuk.

4.3.9 Az abszorció és a disztributivitás tétele

Abszorció. Legyen p, q két tetszőleges kijelentés.
T11. $|(p \wedge (p \vee q))| = |p|$
T12. $|(p \vee (p \wedge q))| = |p|$
A konjunkció abszorbtív (elnyelő) tulajdonságú a diszjunkcióra nézve, és fordítva: a diszjunkció abszortív tulajdonságú a konjunkcióra nézve.

A tétel bizonyítását önállóan próbálja megoldani. Ha nem sikerül, akkor megtalálja az összefoglaló feladatok között.

Disztributivitás. Legyen p, q, r két tetszőleges kijelentés.
T13. $|p \wedge (q \vee r)| = |(p \wedge q) \vee (p \wedge r)|$
T14. $|p \vee (q \wedge r)| = |(p \vee q) \wedge (p \vee r)|$
A konjunkció disztributív tulajdonságú a diszjunkcióra nézve, és fordítva: a diszjunkció disztributív tulajdonságú a konjunkcióra nézve.

A tétel bizonyítását önállóan próbálja megoldani. Ha nem sikerül, akkor megtalálja az összefoglaló feladatok között.

4.3.10 Az implikáció

A hétköznapi életben gyakran használjuk a „ha p, akkor q” alakú összetett kijelentéseket, és a logikai értékét is csak akkor tekintjük hamisnak, ha |p|= i és |q|=h, bár nagyon ritkán találkozunk olyan „ha p, akkor q” kijelentésekkel, ahol |p|= h. Ezek alapján egy újabb logikai műveletet értelmezünk.

Példa:
Ha lesz pénzem, akkor a tengernél nyaralok.

Tekintsük az alábbi értéktáblázatot!

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|\rceil(p \wedge \rceil q)\|$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Látható, hogy $\rceil(p \wedge \rceil q)$ logikai értéke csak abban az egy esetben lesz hamis, ha |p|= i és |q|=h, más esetben igaz.

Kérdés, milyen kötőszavakat használjunk az olyan összetett kijelentések nyelvi formájában, amelyben az összetett kijelentés logikai értéke a táblázat szerint adódik. Egy ilyen lehetséges összetétel (a $\rceil$ és $\wedge$ nyelvi megfelelője alapján) a „nem igaz, hogy (p és nem q)”. Mind a negáció, mind a konjunkció értelmezhető tetszőleges kijelentések között, így a fenti típusú kijelentés is előállítható bármely két kijelentésből, és a komponensek logikai értékei egyértelműen határozzák meg az összetett kijelentés logikai értékét.

A hétköznapi életben hasonló értelemben használjuk a „ha p, akkor q” alakú összetett kijelentéseket, mivel ezek logikai értékét is csak akkor tekintjük hamisnak, ha |p|= i és |q|=h, bár nagyon ritkán találkozunk olyan „ha p, akkor q” kijelentésekkel, ahol |p|= h.

Vizsgáljuk meg, hogy tetszőleges p, q kijelentésekből összetett, „ha p, akkor q” mondat tekinthető-e logikai művelettel összetett kijelentésnek!

Példa:
a) Ha tanulok, akkor jó jegyet kapok az iskolában.
b) Ha otthon vagyok, akkor dolgozom.
c) Ha találkozom a barátommal, akkor visszaadom a könyvét.
d) Ha a 3 prímszám, akkor Kiss Péter az iskola legjobb tanulója.
e) Ha süt a Nap, akkor $2 \cdot 2 = 4$
f) Ha az r sugarú kör kerülete 2rPi, akkor a kutyám vadon élő állat.
A d), e), f), példákból láthatjuk, hogy tetszőleges p,q kijelentésekből nem biztos, hogy értelmes – ha, p akkor q – szerkezettel kifejezhető mondatot kapunk.

Példa:
Fogalmazzuk meg a kijelentéseket – Nem igaz, hogy (p és nem q) formában!
a) Ha tanulok, akkor jó jegyet kapok.
   Nem igaz, hogy (tanulok és mégsem kapok jó jegyet).
b) Ha otthon vagyok, akkor dolgozom.
   Nem igaz, hogy (otthon vagyok és nem akkor dolgozom).
c) Ha találkozom a barátommal, akkor visszaadom a könyvét.
   Nem igaz, hogy (találkozom a barátommal és nem adom vissza a könyvét).
d) Ha a 3 prímszám, akkor Kiss Péter a legjobb tanuló.
   Nem igaz, hogy (3 prímszám és Kiss Péter nem a legjobb tanuló).
e) Ha süt a Nap, akkor $2\times2= 4$
   Nem igaz, hogy (süt a Nap és $2\times2= 4$).
f) Ha az r sugarú kör kerülete 2rPi, akkor a kutyám vadon élő állat.
   Nem igaz, hogy (egy r sugarú kör kerülete 2rPi és a kutyám nem vadon élő állat.
A d), e), f), példákból láthatjuk, hogy tetszőleges p,q kijelentésekből nem biztos, hogy értelmes – ha, p akkor q – szerkezettel kifejezhető mondatot kapunk.

Az a), b), c), mondatok most is értelmesek maradtak, míg a d), e), f), ebben a megfogalmazásban már nem bántja nyelvérzékünket, s logikai értéküket is meghatározhatjuk.

Általában elmondható, hogy bármely „ha p, akkor q” alakú összetett kijelentés átfogalmazható nem igaz, hogy (p és nem q) alakra, de nincs minden nem igaz, hogy (p és nem q) összetételének ha p, akkor q alakú – értelmes – megfogalmazása.

Megjegyezzük, hogy a ha p, akkor q alakú mondat rendszerint csak akkor értelmes, ha a komponensek között tartalmi és oksági kapcsolat is van.

Az eddigiek alapján egy új logikai műveletet értelmezhetünk:

Legyen p, q tetszőleges kijelentés. A nem igaz, hogy (p és nem q) összetett kijelentést a p és q kijelentések implikációjának nevezzük, és p→q-val jelöljük, azaz:

$p \to q := \rceil(p \wedge \rceil q)$.
A p-t előtagnak, a q-t utótagnak nevezzük.
Az implikáció logikai értékét a definíció alapján értelmezzük:

$$|p \to q| := \begin{cases} h, ha\ |p| = i\ \text{és}\ |q| = h \\ i\ egyébként \end{cases}$$

A definíció értéktáblázattal:

|p|	|q|	|p→q|
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

A definíció négyzetes értéktáblázatba foglalva:

		q	
	→	i	h
p	i	i	h
	h	i	i

Két kijelentés implikációjának logikai értékét tehát csak akkor tekintjük hamisnak, ha az előtag igaz, az utótag hamis logikai értékű.

Az implikáció tetszőleges p, q kijelentésre teljesülő, egyszerű tulajdonságait foglaljuk össze a következő részben.

Tétel.
T15. Az implikáció nem kommutatív, azaz $|p \to q| \neq |q \to p|$.
T16. Az implikáció nem asszociatív, azaz $|(p \to q) \to r| \neq |p \to (q \to r)|$.
T17. Az implikáció nem idempotens, azaz $|p \to p| \neq |p|$.

Ezek a tulajdonságok könnyen igazolhatók logikai értéktáblázattal. Megjegyezzük, hogy a $p \to q$ kijelentés megfordításának nevezzük a $q \to p$ kijelentést. Az alábbiakban először két implikációt és azok megfordítását fogalmaztuk meg.

Példa:
Ha Ákosnak jó a bizonyítványa, akkor megkapja a kerékpárt.
Ha Ákos megkapja a kerékpárt, akkor jó a bizonyítványa.
Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor a szemben fekvő szögeinek az összege 1800.
Ha egy négyszög szemben fekvő szögeinek az összege 1800, akkor a négyszög húrnégyszög.

Tétel.
T18. Az implikációra igaz a kontrapozíciós tulajdonság, azaz:
$|p \to q| = |\rceil q \to \rceil p|$.

Bizonyítás:
A következő értéktáblázat bizonyítja a tételt:

$\lvert p\rvert$	$\lvert q\rvert$	$\lvert(p\to q)\rvert$	$\lvert\rceil q$	$\to$	$\rceil p\rvert$
i	i	i	h	i	h
i	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	i	i	i
			1	2	1

A kontrapozíciós tulajdonság nyelvi vetületeit szemlélteti a következő példa:

Példa:
a) Ha játék közben elestem, akkor eltört a kezem.
b) Ha nem tört el a kezem, akkor nem estem el játék közben.

Az a) és b) mondatok nyelvileg különbözőek, de logikai értékük egyenlő. A matematikában a „ha p, akkor q” alakú kijelentéseket – általában tételek kimondásakor – szokás még az alábbi módon is megfogalmazni:

- q akkor, ha p;
- p elégséges feltétele q-nak;
- q teljesüléshez elegendő p teljesülése;
- q szükséges feltétele p-nek;
- p teljesüléséhez szükséges q teljesülése.

Például:
a) Ha a egész szám osztható 4-gyel, akkor 2-vel is osztható.
- a osztható 2-vel akkor, ha a osztható néggyel.
- 2-vel való oszthatóság elégséges feltétele a 4-gyel való oszthatóság.
- 2-vel való oszthatóság szükséges feltétele a 4-gyel való oszthatóságnak.

b) Ha egy háromszög egyenlő oldalú, akkor a háromszög hegyesszögű.
- Egy háromszög hegyesszögű, ha egyenlő oldalú.
- Egy háromszög oldalainak egyenlősége elégséges feltétel ahhoz, hogy a háromszög hegyesszögű legyen.
- Ahhoz, hogy egy háromszög egyenlő oldalú legyen, szükséges, hogy mindhárom szöge hegyesszög legyen.

Egy „ha p, akkor q” alakban megfogalmazott tétel bizonyításánál a p állításból indulunk ki, s ebből igazoljuk a q állítás helyességét. A kontrapozíciós tulajdonság alapján a bizonyítás elvégezhető úgy is, hogy a $\rceil q$ állításból indulunk ki és $\rceil p$ állítást igazoljuk.

Példa:
Például ha az előző tételeket akarjuk bizonyítani, akkor egyenértékű, ha a következőket bizonyítjuk:
- Ha az a szám nem osztható 2-vel, akkor nem osztható 4-gyel sem.
- Ha egy háromszög nem hegyesszögű, akkor nem is egyenlő oldalú.

4.3.11 Az ekvivalencia

Legyen p és q két tetszőleges kijelentés. Képezzük a $p \to q$; $q \to p$ kijelentéseket. Mivel az implikáció nem kommutatív tulajdonságú művelet, ez a két implikáció általában különböző logikai értékű.

A $p \to q$, $q \to p$ implikációk konjunkcióval egy új logikai műveletet értelmezünk.

Legyen p, q tetszőleges kijelentés. A p, q kijelentések ekvivalenciáján értjük és $p \leftrightarrow q$-val jelöljük a következőt:
$p \leftrightarrow q := (p \to q) \wedge (q \to p)$.
A $p \leftrightarrow q$ kifejezés olvasása: p ekvivalens q-val.
Az ekvivalencia logikai értéktáblázata a definíció alapján így adható meg:

$\lvert p\rvert$	$\lvert q\rvert$	$\lvert(p \to q)\rvert$	$\lvert(q \to p)\rvert$	$\lvert(p \leftrightarrow q)\rvert$
i	i	i	i	i
i	h	h	i	h
h	i	i	h	h
h	h	i	i	i

A definíció négyzetes értéktáblázatba foglalva:

		q	
	$\leftrightarrow$	i	h
p	i	i	h
	h	h	i

A feltüntetett értéktáblázat szerint $p \leftrightarrow q$ logikai értéke akkor igaz, ha p-nek és q-nak azonos a logikai értéke.

Az ekvivalencia logikai műveletre tetszőleges p, q kijelentés esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

Tétel.
T19. Az ekvivalencia kommutatív, azaz $|p \leftrightarrow q| = |q \leftrightarrow p|$
T20. Az ekvivalencia asszociatív, azaz
$|(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r| = |p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)|$.

A tételek logikai értéktáblázattal igazolhatók, a feladatok között ezt a tételt is megtalálja a megoldásával együtt.

Az ekvivalenciának megfelelő „ha p, akkor q” és „ha q, akkor p” kijelentéseket a matematikában „q akkor és csak akkor, ha p”, illetve „p szükséges és elégséges feltétele q”-formában szokás megfogalmazni.

Példa:
a) Egy háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú, ha két szöge egyenlő.
b) Egy a egész szám 10-zel való oszthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a szám tízes számrendszerben felírt alakja 0-ra végződjön.

Az ekvivalencia segítségével megfogalmazott tételeket a matematikában kritériumoknak is nevezzük.

4.3.12 Feladatok

A következőkben néhány feladatot jelölünk ki a Logika műveletei alfejezeteihez.

Negáció

1) Képezzük a következő kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását!
Esik az eső.

2) Képezzük a következő kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását!
1 kisebb, mint 2.

3) Képezzük a következő kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását!
Ez a paralelogramma négyzet.

4) Képezzük a következő kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását!
3+2=5.

5) Képezzük a következő kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását!
Ákos jó tanuló.

6) Képezzük az alábbi kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását! Ezeket fogalmazzuk meg többféleképpen is!
Az iskola minden tanulója szereti a matematikát.

7) Képezzük az alábbi kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását! Ezeket fogalmazzuk meg többféleképpen is!
11 kisebb, mint 7.

8) Képezzük az alábbi kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását! Ezeket fogalmazzuk meg többféleképpen is!
A 4 pozitív szám.

9) Határozzuk meg a p kijelentés négyszeres és ötszörös negációjának ($\neg\neg\neg\neg p$, $\neg\neg\neg\neg\neg p$) logikai értékét! Általánosítsuk a feladatot!

Konjunkció

11) Képezzük a kijelentések konjunkcióját és határozzuk meg a logikai értéküket! A megoldásnál a kijelentések logikai értékét matematikai ismereteink alapján állapítsuk meg!

a) p := 7 osztója 14-nek
q := 100 nagyobb, mint 3

b) p := A négyzet síkidom.
q := A négyzet nem paralelogramma.

Diszjunkció

12) Igazoljuk, hogy a diszjunkció kommutatív, azaz

Bármely p,q,r kijelentésre: $|p \vee q| = |q \vee p|$!

13) Igazoljuk, hogy a diszjunkció asszociatív, azaz
Bármely p,q,r kijelentésre: $|(p \vee q) \vee r| = |p \vee (q \vee r)|$.

De Morgan azonosság

14) Igazolja a De Morgan azonosságokat a diszjunkcióra és a konjunkcióra nézve!

Implikáció

15) Igazolja, hogy bármely p kijelentésre : $|p \rightarrow p| \neq |p|$ (Az implikáció nem idempotens.)

Ekvivalencia

16) (a) Fogalmazzuk meg a következő kijelentéspár ekvivalenciáját többféleképpen is! (b) Határozzuk meg a logikai értékét!
p:= Az n egész szám 0-ra végződik.
q:= Az n egész szám páros.

4.4 ÖSSZEFOGLALÁS

A logika tudománya a gondolkodással foglalkozik. A gondolkodást természetesen nem mint lelki folyamatot vizsgálja, hanem csak az úgynevezett gondolatformákat, ezeknek egymással való kapcsolatát és ezt a kapcsolatot létrehozó logikai műveletet. Központi problémája a helyes következtetések fogalmának szabatos tisztázása.

Állításon vagy kijelentésen olyan kijelentő mondatot értünk, amely egyértelműen igaz vagy hamis; tehát

a) nem lehet igaz is, hamis is (az ellentmondástalanság elve),
b) nem lehet az, hogy se nem igaz, se nem hamis (a kizárt harmadik elve).

4.5 ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

3) Fogalmazzuk meg az ellentmondástalanság és a harmadik kizárásának az elvét!
5) Mit értünk logikai műveleten?
6) Definiáljuk a negációt és adjuk meg logikai értéktáblázatát!

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK (2)

1) Definiáljuk a konjunkciót és adjuk meg négyzetes logikai értéktáblázatát!
2) Írjuk fel a konjunkció kommutatív és asszociatív tulajdonságát!
3) Definiáljuk a diszjunkciót és logikai értékét!
4) Kommutatív és asszociatív tulajdonságú-e a diszjunkció? (Bizonyítsuk be!)
5) Képezzük a következő kijelentéspárok konjunkcióját és diszjunkcióját!

a) Pista szőke.
Pista szemüveges.
b) Esik az eső.

Fúj a szél.

c) Ez a paralelogramma nem rombusz.
Ez a paralelogramma téglalap.

d) 3 nagyobb, mint 1.
2 kisebb, mint 3.

6) Mit jelent az, hogy a konjunkció a diszjunkcióra (diszjunkció a konjunkcióra) disztributív? Bizonyítsuk be a disztributív tulajdonságokat!

7) Írjuk fel és bizonyítsuk be a De Morgan képleteket!

8) Képezzük a következő kijelentések tagadását és fogalmazzuk meg több-féleképpen!

a) A legjobb barátom levelet írt vagy megjött a vonattal.
b) A legjobb barátom levelet írt és megjött a vonattal.
c) A 9 nem páros és osztható 3-mal.
d) A 15 páros vagy osztható 4-gyel.

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK (3)

1) Definiáljuk az implikációt és adjuk meg logikai értéktáblázatát!

2) Írjuk fel és bizonyítsuk be az implikáció tulajdonságait!

3) Fogalmazzuk meg a következő kijelentéspárok implikációját!

a) Esik az eső.
Fúj a szél.

b) 3 nagyobb, mint 1.
2 kisebb, mint 3.

c) Ez a paralelogramma nem rombusz.
Ez a paralelogramma téglalap.

(Az implikáció előtagja először legyen az első, utótagja pedig a második kijelentés. Fogalmazzuk meg fordított sorrendben is. Abban az esetben, ha az implikáció ha…, akkor… típusú megfogalmazása sérti nyelvérzé-kün-ket, akkor az implikációt „nem igaz, hogy …, és nem…” formában fogalmazzuk meg)

4) Definiáljuk az ekvivalenciát! Értelmezzük az ekvivalencia logikai értékét!

5) Milyen tulajdonságai vannak az ekvivalenciának? Bizonyítsuk be ezeket!

6) Fogalmazzuk meg a 3) feladatban szereplő kijelentéspárok ekvivalenciáját (többféleképpen is)!

7) Írjuk le az alábbi összetett kijelentésekben szereplő egyszerű kijelentéseket! Milyen logikai művelettel keletkezett az összetett kijelentés?

a) Ez a cég csak akkor kaphat hitelt, ha megszünteti veszteséges termékeinek a gyártását.

b) Ezen cég hitelfelvételének szükséges és elégséges feltétele, hogy megszüntesse veszteséges termékeinek a gyártását.

5. A HALMAZELMÉLET

5.1 CÉLKITŰZÉS

A naiv halmazelmélet fogalmait, alapvető eredményeit tárgyaljuk. A halmazelmélet szerepének tisztázása után a legfontosabb halmazokkal kapcsolatos műveletek definiálása következik. A fejezet alapvető célja, hogy a predikátumlogikai bizonyítások alapjául szolgáljon.

5.2 TARTALOM

A halmazelmélet
Műveletek halmazokkal
Az unió (egyesítés)
A metszet (közös rész)
A különbség (differencia)
A komplementer (kiegészítő) halmaz
A naiv halmazelmélet
Feladatok

5.3 A TANANYAG KIFEJTÉSE

5.3.1 Halmazelmélet

A halmazok általános tulajdonságaival a matematikának egy, a 19. sz. végén kialakult külön ága, a halmazelmélet foglalkozik. A halmazelmélet a matematika önálló fejezetévé csak a 19. század utolsó negyedében vált G. Cantor (1845–1918) német matematikus munkássága nyomán. Létrejöttét annak köszönhette, hogy elfogadták a halmazok tetszőleges képezhetőségét. A halmazelmélet pontosabban 1873-ban született meg, amikor G. Cantor bebizonyította, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható. Maga Cantor alkotta meg a legfontosabb fogalmakat, melyeket itt tárgyalunk. A halmazalgebra szimbolikája és eredményei a matematika különféle rész területeinek egységes tárgyalására szolgálnak, és fontos szerepük van a gyakorlati alkalmazásoknál (pl. számítógépek).

A halmazokkal való foglalkozás a matematika alapjainak kutatását meghatározóan befolyásolta, mivel a halmazok tárgyalásánál – az eredetileg Cantor által adott definíció alapján – ellentmondásokat lehetett konstruálni. Ennek ellenére még ma is nagymértékben ezt a definíciót veszik alapul, de elkerülik olyan halmazok alkotását, amelyek ellentmondásosnak bizonyultak. Ezt az ún. naiv halmazelméletet a későbbiekben tárgyaljuk. Ezek az ismeretek a korábbi tanulmányok során már biztosan előfordultak, a matematikai tanulmányainkhoz és az iskolai matematikatanításhoz alapvetően szükségesek. A halmazelmélet felépítésénél a kívánatos szigorúságot a halmaz definíciójának precíz leszűkítésével, amelynek során valamennyi, a matematika számára jelentős tulajdonság megmarad, az axiomatikus halmazelméletben érjük el, ami a tárgyalásunkból kimarad.

A mindennapi életben is gyakran használjuk a következő szavakat: „sokaság”, „összesség”, „tömeg”, „csoport”, „halmaz”. Például: a csillagok „sokasága”; a dolgozók „összessége”; a fogalmak „tömege”; a kirándulók „csoportja”; a természetes számok „halmaza” stb. Valamennyi esetben használhatjuk a „halmaz” elnevezést is: a csillagok halmaza; a dolgozók halmaza; a fogalmak halmaza; a kirándulók halmaza. Ezek és sok hasonló példa alapján absztrakcióval alakíthatjuk ki a halmaz fogalmát.

A halmaz bizonyos meghatározott, különböző (valóságos vagy gondolatban kialakított) objektumoknak (dolgoknak) az összességét jelenti. Ez nem tekinthető a halmazfogalom definíciójának, csupán más szavakkal való körülírásának. A halmaz fogalmát e tankönyvben alapfogalomként, azaz definíció (értelmezés) nélkül elfogadott fogalomként használjuk. A halmazt alkotó objektumok (dolgok) a halmaz elemei. Egy halmazban annak mindegyik eleme csak egyszer fordul elő. Az elem fogalmát is alapfogalomként használjuk.

A halmaz alapfogalom. Tárgyak, dolgok, fogalmak bizonyos összességét halmaznak nevezzük. A matematikában a halmaz, az elem és az „elemének lenni”, azaz hogy egy dolog eleme-e a halmaznak, alapfogalmak, tehát ezeket nem definiáljuk.

Halmazt alkotnak például egy iskola 8. osztályos tanulói; a polcon lévő könyvek; egy egyenes pontjai stb. Egy halmaznak bármik lehetnek elemei, még akár halmazok is. A halmazokról is egyszerűbb beszélni, ha csak a jelöléssel hivatkozunk rájuk.

A halmazokat nagy betűkkel (A, B, …, H, J, K, …), az elemeket kis betűkkel (a, b, c, ...) jelöljük.

A halmaz elemeit kapcsos zárójelek közé írjuk. Egy halmaz megadása a halmaz elemeinek a megadását jelenti. Ez a következő módok valamelyikével történhet:

1) Az elemek felsorolásával (minden elemet csak egyszer sorolunk fel)

Példa:
H:={1,2,3,4}
Ezt így olvassuk: H (halmaz) elemi legyenek 1, 2, 3, 4.

2) Az elemek közös tulajdonságának a megadásával (vagy a rájuk vonatkozó kapcsolattal).

H:={x| x a T tulajdonsággal rendelkezik}

Ezt így olvassuk: A H halmaz azon x elemekből áll, amelyek ren-del-keznek a T tulajdonsággal.

Példa:
Pl: H:={x|x természetes szám és x osztója 24-nek}

Egy adott H halmaz esetén azt, hogy a eleme a halmaznak az a∈H, a tagadást, azaz, hogy nem eleme az a∉H szimbólummal jelöljük.

Példa:
H:={1,2,3,4}
2∈H
Ezt így olvassuk: 2 eleme a H (halmaz)-nak
7∉H

Ezt így olvassuk: 7 nem eleme a H (halmaz)-nak

Egy-egy probléma tárgyalása esetén megadunk egy alaphalmazt.

Alaphalmaznak nevezzük azt a halmazt, amelynek elemeit egy feladat megoldása során figyelembe vesszük. Az alaphalmazt vagy más szóval univerzumot U-val jelöljük.

Példa:

1) U:={1,2,3,4,5,6,7,8,9}
   H:={3-mal osztható számok}={3,6,9}

A 6 osztható 3-mal, tehát eleme a H halmaznak; ezt $6 \in H$-val jelöljük, az 5 nem osztható 3-mal, ezért nincs a H halmazban, ennek jelölése pedig $5 \notin H$.

Üres halmaznak nevezzük azt a halmazt, amelyiknek egyetlen eleme sincs. Jele: Ø.

Példa:

1. T:={x|x A mai Magyarország tengeri kikötői},
2. V:={x|x 8-nál kisebb, de 13-nál nagyobb valós szám},
3. M:={x|x a világűrben járt magyar űrhajósnő}

Mindhárom üres halmaz, azaz T=Ø, V=Ø, M=Ø

Amint már említettük, egy halmaznak halmazok is lehetnek elemei, ekkor halmazok halmazáról beszélünk. Például: H={Ø, K, L}, A H halmaznak három eleme van, az üres halmaz, a K és az L halmaz.

Ha a H és K halmazok elemei ugyanazok, akkor azt mondjuk, hogy a két halmaz egyenlő; jele: H=K.

Példa:

H:={8-nál kisebb páros természetes számok},
K:={ 7-nél kisebb, 2-vel osztható természetes számok}.

Ennek a két halmaznak ugyanazok az elemei, tehát H=K.

A részhalmaz fogalma. Ha H halmaz minden eleme a K halmaznak is eleme, akkor a H halmazt a K halmaz részhalmazának nevezzük. Jele: $H \subseteq K$. A $H \not\subset K$ jelölés azt jelenti, hogy H nem része a K-nak.

A valódi részhalmaz fogalma. A $H \subset K$ szimbólum jelentése: H része a K-nak, de H nem egyenlő K-val. H valódi része K-nak. A $\subset$ jel a valódi tartalmazás jele.

Példa:

H:={0,4,8}; K:={0,2,4,6,8,}. $H \subseteq K$, mert a H halmaz minden eleme a K halmaznak is. A K halmaznak a H halmaz elemein kívül van még más eleme is, ezért H valódi része K-nak, azaz $H \subset K$.

animáció

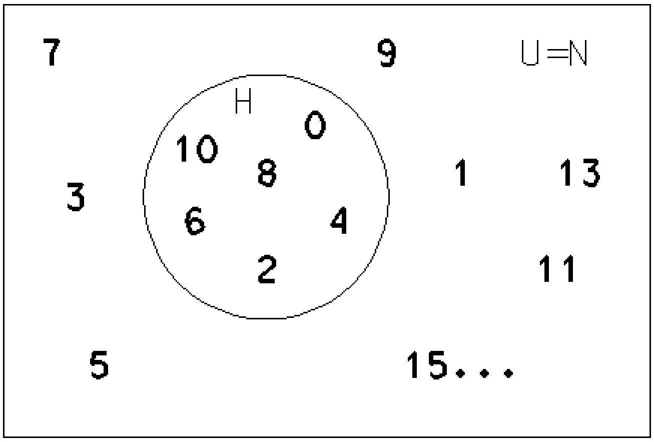
Az előző definíciók alapján beláthatók a következő állítások.

- Minden halmaz részhalmaza, de nem valódi részhalmaza önmagának.
- Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.
- Tetszőleges H és K halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha H rész-hal-maza K-nak és K is részhalmaza H-nak.
- Ha $H \subseteq K$ és $K \subseteq L$, akkor $H \subseteq L$.

A halmazokat körlapokkal (esetleg más síkbeli zárt alakzattal) szemléltetjük. Ezeket az ábrákat Venn-diagramoknak nevezzük.

Példa:

Szemléltessük a $H:=\{x|x\in N$, 2 osztója x-nek, és $x < 11\}$ halmazt a természetes számok ($N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ halmazán (8. kép).



8. kép A H halmaz szemléltetése a természetes számok (N) halmazán

5.3.2 Műveletek halmazokkal

A halmazokkal kapcsolatos műveletek két vagy több halmaz elemei közti viszony meghatározására adnak módot. A műveletek egy részét naponta használjuk, csak nem gondolunk a matematikára. Amikor összegyűjtjük a különböző órákon készült jegyzeteket egy tételhez, amikor a két baráti körből találgatjuk, hogy ki kinek szimpatikus, vagy a tanegységlistáról kiválogatva az adott szemeszterben felvett tárgyakat, nos, ezekben az esetekben halmazműveleteket hajtunk végre.

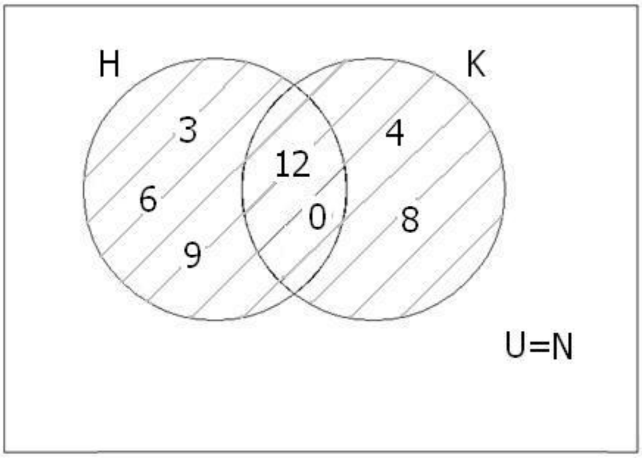
A műveletek tehát ismertek, két halmaz elemeit egyesíthetjük, tekinthetjük két halmaz közös elemeit, egy halmazból kizárhatjuk egy másik elemeit stb. A műveletek mellett fontosak a műveletek tulajdonságai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás, idempotencia, abszorpció) is, amelyek már nem hangzanak ismeretlenül. Tekintsük át szakszavakkal ezt a témakört!

5.3.3 Az unió (egyesítés)

A H és a K halmazok unióján vagy egyesítésén azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek a H és K halmazok közül legalább az egyiknek elemei. Jele: H ∪ K.

Példa:
1. H:={0,3,6,9,12},
   K:={0,4,8,12},
   H ∪ K= {0,3,4,6,8,9,12}.

Venn-diagrammal szemléltetjük a természetes számok halmazán (9. kép)



9. kép A H halmaz és a K halmaz uniója

A satírozott síkrész a művelet eredményeként előállt halmazt szemlélteti. (Ezt a jelölést követjük a továbbiakban is.)
2. A páros számok és a páratlan számok halmazának uniója az egész számok halmaza, amelyet Z-vel jelölünk. Azaz, Z={..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}.

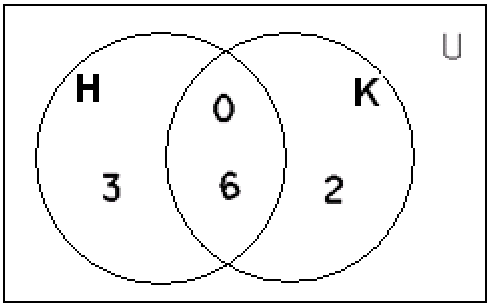
5.3.4 A metszet (közös rész)

H és K halmazok metszetén vagy közös részén mindazon elemek halmazát értjük, amelyek H-nak és K-nak is elemei. Jele: H ∩ K.

Ha H ∩ K=Ø, akkor H-t és K-t idegen vagy diszjunkt halmazoknak nevezzük.

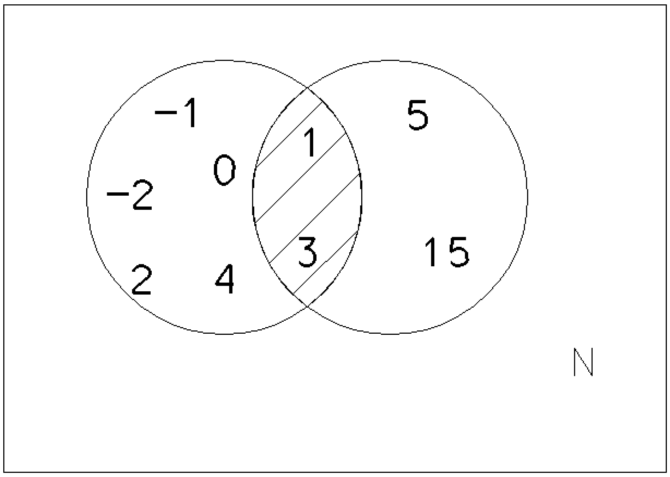
Példa:
1. H:={0,3,6},
   K:={0,2,6},
   H ∩ K = {0,6}.

Venn-diagrammal szemléltetve a természetes számok halmazán (10. kép).



10. kép A H halmaz és a K halmaz metszete

2. H:= {x|x∈Z és -3<x<5},
   K:={1,3,5,15},
   $H \cap K = \{1,3\}$.



11. kép A H halmaz és a K halmaz metszete

Megjegyezzük, hogy az unió és metszet művelete több halmaz esetén is hasonlóképpen értelmezhető.

Ha $H \cap K = Ø$, akkor H-t és K-t idegen vagy diszjunkt halmazoknak nevezzük.

Példa:
1. H:={0,3,6,9,12},
   K:={-1, -2, -3},
   $H \cap K = Ø$

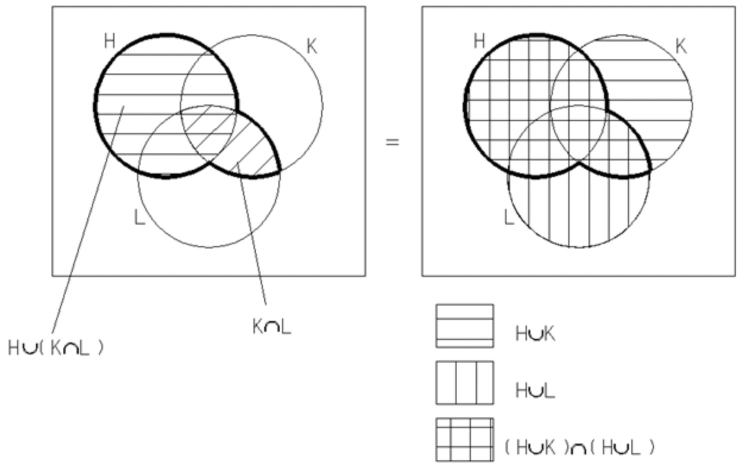
Olvasva: H és K metszete üres halmaz vagy rövidebben H és K halmaz diszjunkt halmazok.

Legyenek H, K, L halmazok az U alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Az unió és a metszet képzésére teljesülnek a következő tulajdonságok.

Tétel.

T21. $\mathbf{H \cup H = H}$ **és** $\mathbf{H \cap H = H}$ **(idempotencia),**
T22. $\mathbf{H \cup K = K \cup H}$ **és** $\mathbf{H \cap K = K \cap H}$ **(kommutativitás),**
T23. $\mathbf{(H \cup K) \cup L = H \cup (K \cup L)}$ **és** $\mathbf{(H \cap K) \cap L = H \cap (K \cap L)}$ **(asszociativitás),**
T24. $\mathbf{H \cup (K \cap L) = (H \cup K) \cap (H \cup L)}$ **és** $\mathbf{H \cap (K \cup L) = (H \cap K) \cup (H \cap L)}$ **(disztributivitás).**

Ezek a tulajdonságok könnyen igazolhatók Venn-diagrammal.
A T24-es tétel (tulajdonság) első részének igazolását szemlélteti az 12. kép. A többi tulajdonság igazolását végezzük el önállóan!
Bizonyítás:

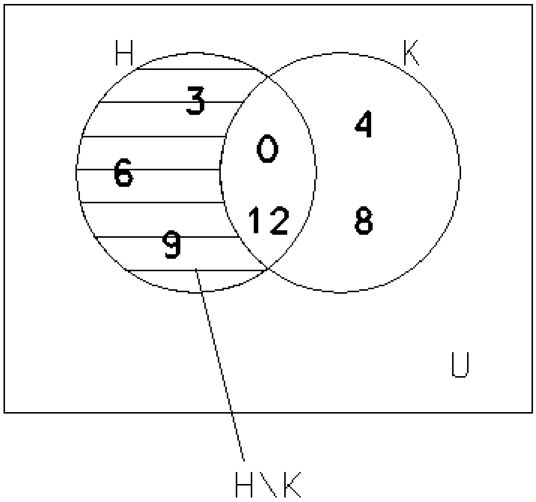


12. kép Az unió metszetre nézve disztributív tulajdonságának bizonyítása

5.3.5 Különbség (differencia)

H és K halmazok különbségén azt a halmazt értjük, amely azokat és csak azokat az elemeket tartalmazza, amelyek a H halmaznak elemei, de nem elemei a K halmaznak. Jelölése: H \ K.

Példa:
H:={0,3,6,9,12},
K:={0,4,8,12},
H \ K={3,6,9}.
Venn-diagrammal szemléltetve:



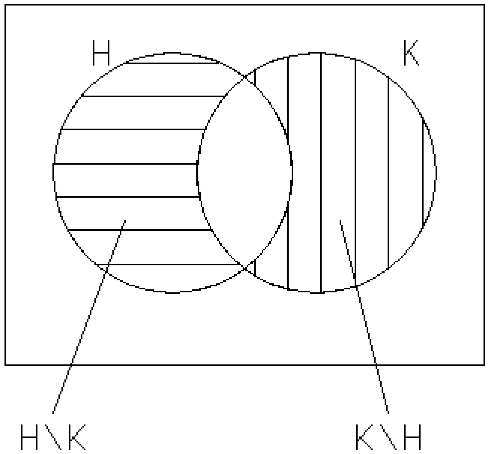
13. kép H és K halmaz különbsége

Tétel
Tetszőleges H és K halmazokra érvényesek a következő tulajdonságok:

Tétel:

T25. H \ H ≠ H (H \ H= Ø) (nem idempotens),
T26. H \ K ≠ K \ H (nem kommutatív),
T27. (H \ K)\L ≠ H \ (K \ L) (nem asszociatív).

Bizonyítás:
A T26-os tétel tulajdonságait szemlélteti Venn-diagrammon a 14. kép.
H\K ≠ K\H

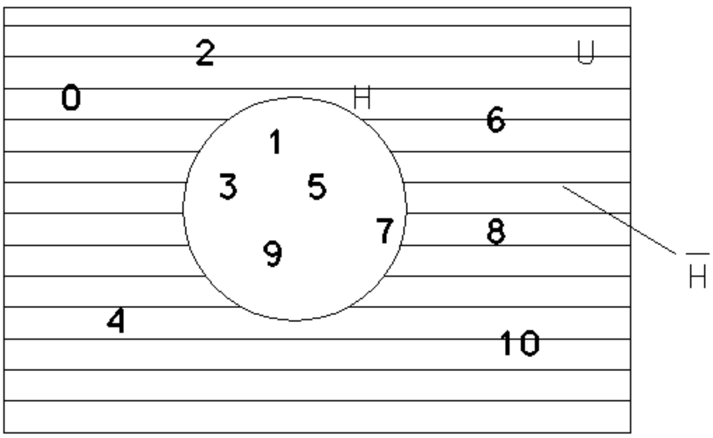


14. kép A halmazok különbsége nem kommutatív tulajdonságú

5.3.6 Komplementer (kiegészítő) halmaz

H halmaz U alaphalmazra vonatkozó komplementer (kiegészítő) halmazán értjük azt a halmazt, amely U-nak H-hoz nem tartozó elemeiből áll. Jele: ~H, vagy a halmaz feletti vízszintes vonal ($\overline{H}$).

Példa:
Legyen U:={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} és H:={1,3,5,7,9}.
Ekkor ~H = {0,2,4,6,8,10}.
Venn-diagrammal ábrázolva (15. kép).



15. kép A H halmaz U alaphalmazra vonatkozó komplementer halmaza

Tétel:

A definíció alapján könnyen beláthatók a következő tulajdonságok:

T28. $\sim\sim H = H$
T29. $\sim \emptyset = U$
T30. $\sim U = \emptyset$
T31. $U \setminus H = \sim H$

Tétel:

Venn-diagrammal belátható a De Morgan azonosságok:
T32. $\sim (H \cup K) = \sim H \cap \sim K$,
T33. $\sim (H \cap K) = \sim H \cup \sim K$.

5.3.7 A szimmetrikus különbség

H és K halmaz szimmetrikus különbségén értjük a két halmaz azon elemeit, melyek nem tartoznak a két halmaz metszetébe. Jelölése: Δ

Példa:
Legyen $H:=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ és $K:=\{0, 2, 4, 6\}$.
Ekkor $H \Delta K = \{1, 3, 6\}$.

5.3.8 A naiv halmazelmélet

A naiv halmazelmélet a halmazelmélet eredeti, a 19. században kialakult formájának elnevezése, amely megengedte tetszés szerinti halmazok képzését. Az itt tárgyalt halmazelméletet naiv halmazelméletnek szokás nevezni, szemben az axiomatikus halmazelmélettel. Tárgyalásunkban ugyanis nem soroltuk fel a felhasználandó alapfogalmakat, az ezekre vonatkozó axiómákat, és azokat a logikai törvényeket, amikre támaszkodtunk. Néhány alapfogalmat mégis megemlítettünk, mint például a halmaz, az elem fogalmát.

A naiv halmazelméletnek az a feltevése, hogy korlátlanul képezhetünk halmazokat, ellentmondásokhoz vezetett: kiderült, hogy halmazokból, számosságokból túl sok van ahhoz, hogy egy halmazba lehessen tenni őket, ezért a 20. század elején kialakult az axiomatikus halmazelmélet, ami csak az axiómák segítségével felépíthető halmazok létezését fogadta el.

Az axiomatikus halmazelmélet

A modern halmazelmélet felépítési formája, a tágabb értelemben vett matematikai logika egyik fejezete. Mivel a naiv halmazelmélet korlátlan halmazképzési eljárásai ellentmondásokra vezettek, célja kettős: az ellentmondások elkerülése érdekében nem engedi meg tetszőleges halmazok szerepeltetését, hanem előírja a halmazok létrehozásának módszereit, másrészt a matematika fogalmait (pl. függvény, számosság) a halmaz fogalmára vezeti vissza.

5.3.9 Feladatok

1) (a) Definiálja a gyümölcsök halmazát egyes elemeinek felsorolásával! (b) Írja ezt röviden, matematikai jelöléssel is! (c) Adja meg a halmaz egy lehetséges alaphalmazát! (d) Adja meg a halaz egy elemét! (e) Adjon meg jelöléssel egy olyan elemet, ami nem tartozik a halmazba!

2) Az alábbi halmazok közül melyik üres halmaz?

a) R:={x|x repülő fa},
b) H:={x|x házas agglegény},
c) F:={x|x magyarországi folyók 2000-ben}

3) Melyik esetben neveztünk meg azonos halmazokat?

a) U:={természetes számok},
H:={100-nál kisebb páros természetes számok},
K:={0-nál nagyobb páratlan természetes számok}.

b) U:={magyarországi települések 2000-ben},
H:={magyarországi megyeszékhelyek 2000-ben},
K:={Salgótarján, Eger, Miskolc, Nyíregyháza, Debrecen, Budapest, Kecskemét, Szolnok, Szeged, Békéscsaba, Pécs, Szekszárd, Székesfehérvár, Tatabánya, Győr, Veszprém, Zalaegerszeg, Szombathely, Kaposvár}.

4) Adott H:={0,5,10} és K:={0, 10} halmaz. Teljesülnek a két halmazra a következő állítások?

a) $H \subseteq K$
b) $K \subseteq H$
c) $H \subset K$
d) $K \subset H$
e) $K = H$

5) Adott H:={x|x húsz és 30 év közötti magyar állampolgár} és K:={x|x hallgatói jogviszonyban van egy hazai felsőoktatási intézményben} halmaz. Teljesülnek a két halmazra a következő állítások?

a) $H \subseteq K$
b) $K \subseteq H$
c) $H \subset K$
d) $K \subset H$
e) $K = H$

6) Adott H:={2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16…} és K:={x|x 0-nál nagyobb páros szám} halmaz. Teljesülnek a két halmazra a következő állítások?

a) $H \subseteq K$
b) $K \subseteq H$

c) $H \subset K$
d) $K \subset H$
e) $K = H$

7) Állapítsuk meg, hogy a H és K halmazok közül részhalmaza-e egyik a másiknak!
a) H:={4,5}; K:={5,4},
b) H:={3,4,5}; K:={4,5,6}.

8) Legyen H:={-2, -1, 0, 1, 2} illetve K:={0, 2, 4,8,16} két halmaz. Határozza meg az alábbi halmazok elemeit!
a) $H \cup K$
b) $H \cap K$

9) Legyenek H, K, L halmazok az U alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Bizonyítsa be az alábbi tételeket! (Ezek a tulajdonságok könnyen igazolhatók Venn-diagrammal.)
Tétel.
1. tétel: $H \cup H=H$ (idempotencia),
2. tétel: $H \cap H=H$ (idempotencia),
3. tétel: $H \cup K=K \cup H$ (kommutativitás),
4. tétel: $H \cap K=K \cap H$ (kommutativitás),
5. tétel: $(H \cup K) \cup L=H \cup (K \cup L)$ (asszociativitás),
6. tétel: $(H \cap K) \cap L=H \cap (K \cap L)$ (asszociativitás),
7. tétel: $H \cup (K \cap L) = (H \cup K) \cap (H \cup L)$ (disztributivitás).
8. tétel: $H \cap (K \cup L) = (H \cap K) \cup (H \cap L)$ (disztributivitás).

10) Legyen H:={0,1, 2} és K:={0,3, 6,18} halmaz. Milyen elemei vannak a $H \setminus K$ és a $K \setminus H$ halmaznak?

11) Legyenek H, K halmazok az U alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Bizonyítsa be az alábbi tételeket!
Tétel.
1. tétel: $H \setminus H \neq H$ ($H \setminus H= \emptyset$) (nem idempotens)
2. tétel: $H \setminus K \neq K \setminus H$ (nem kommutatív)
3. tétel: $(H \setminus K) \setminus L \neq H \setminus (K \setminus L)$ (nem asszociatív)

12) Legyen U:={1, 2, 3, 4, 5} és H:={1, 5}. Határozza meg a H halmaz komplementer halmazát az U alaphalmazon!

13) Legyenek H, K halmazok az U alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Bizonyítsa be az alábbi tételeket!

Tétel.
1. tétel: $\sim\sim H = H$
2. tétel: $\sim \emptyset = U$
3. tétel: $\sim U = \emptyset$
4. tétel: $U \setminus H = \sim H$

14) Legyenek H, K halmazok az U alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Bizonyítsa be De Morgan azonosságokat!
Tétel.
1. tétel: $\sim (H \cup K) = \sim H \cap \sim K$,
2. tétel: $\sim (H \cap K) = \sim H \cup \sim K$.

15) $U:=\{x|x \in N \text{ és } x \leq 20\}$
$H:=\{x|x \in N, \text{ 3 osztója x-nek és } x \leq 20\}$
$K:=\{x|x \in N, \text{4 osztója x-nek és } x \leq 20\}$
Képezzük a következő halmazokat!
a) $H \cup K$,
b) $H \cap K$,
c) $\sim H$
d) $H \setminus K$,
e) $K \setminus H$

16) Milyen kapcsolat van H és K halmaz között, ha
a) $H \setminus K = \emptyset$ és $H \cap K = H$,
b) $H \setminus K = \emptyset$ és $H \cup K = H$,
c) $H \setminus K = \emptyset$ és $K \setminus H = \emptyset$.

17) Teljesül-e minden H, K halmazra, hogy $((H \setminus K) \cup (K \setminus H)) \subset (H \cup K)$?

18) A halmazműveletekre vonatkozó tulajdonságok alapján bizonyítsuk be, a következő állításokat, ahol H, K és L egy adott U alaphalmaza rész-halmazai!
a) $H = (H \cap K) \cup (H \cap \sim K)$,
b) $H \cup K = (H \cap \sim K) \cup (H \cap K) \cup (\sim H \cap K)$,
c) $U = (H \cap \sim K) \cup K \cup (L \cap \sim H) \cup \sim L$

5.4 ÖSSZEFOGLALÁS

A naiv halmazelmélet fogalmait, alapvető eredményeit tárgyaltuk. A halmazelmélet szerepének tisztázása mellett a legfontosabb, halmazokkal kapcsolatos műveleteket definiáltuk. A fejezet alapvető a predikátumlogikai bizonyítások alapjául szolgált.

5.5 ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Hogyan adhatunk meg egy halmazt?
2. Legyen H és K két tetszőleges halmaz. Mikor mondjuk, hogy H részhalmaza (valódi részhalmaza) K-nak?
3. Definiáljuk H és K halmaz unióját és metszetét! Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek ezek a műveletek?
4. Mit jelent az, hogy a metszetképzés (az unióképzésre), az unió-képzés (a metszetképzésre) disztributív?
5. Definiáljuk H és K halmazok különbségét! Milyen tulajdonságai vannak a különbség képzésnek?

6. A KIJELENTÉSLOGIKA

6.1 CÉLKITŰZÉS

A kijelentések logikai értékét (igaz, hamis) figyelembe véve a kijelentések között értelmezett műveletekkel előállított formulák alapján egyszerű következtetésekkel (kijelentéslogikával) foglalkozunk.

6.2 TARTALOM

A formulák interpretációja
A következtetés
Gyakran használt következtetési szabályok
Leválasztási szabály (modus ponens)
„Elvevő” szabály (modus tollens)
Láncszabály (feltételes szillogizmus)
Az indirekt bizonyítás
A kontrapozíció („elvetési mód”)
A diszjunktív szillogizmus (modus tollendo ponens)

6.3 A TANANYAG KIFEJTÉSE

6.3.1 A formulák interpretációja

Bizonyításon egy állításnak más állításoktól meghatározott, logikai következtetési szabályokkal való levezetését értjük. Magától értetődik, hogy a matematikában nem lehet minden állítást bebizonyítani anélkül, hogy „ördögi körbe” ne jutnánk. Ha megkíséreljük, hogy bonyolultabb állításokat egyszerűbbekre vezessünk vissza, akkor hamar olyan tételekbe ütközünk, amelyeket egyetlen korábbi tételből már nem lehet levezetni.

A matematikus ezért különböző részterületeit axiómákra, vagyis igaznak feltételezett állításokra alapítja, amelyekhez a következő bizonyításoknál vissza lehet nyúlni. Végül is minden bizonyítást axiómákra lehet visszavezetni (axiómarendszer). Hogy mit lehet egy axiómarendszerből levezetni, attól is függ, hogy melyik logikai rendszer mellett döntünk, milyen következtetési szabályokat engedünk meg, amelyek igaz állításokból igaz állításokra vezetnek. A kijelentéslogika axiomatikus felépítésével mi nem foglalkozunk. A tárgyalás másik, általunk alkalmazott módját a kijelentések durva szerkezet szerinti vizsgálatának nevezik.

Először a kijelentések igaz, hamis logikai értékét figyelembe véve a formulákra épülő egyszerű következtetésekkel (kijelentéslogikával) foglalkozunk. A kijelentéslogika (kijelentéskalkulus) kijelentéseknek ebben az értelmében vett (durva szerkezet szerinti) vizsgálódásának a hiányosságára hívjuk fel a figyelmet egy következtetési feladat kapcsán.

Példa:
1) Ha befejeződik a szemeszter, akkor elutazunk Sopronba.
A komponensek legyenek a következők:
v:= befejeződik a szemeszter

s:= elutazunk Sopronba

A táblázatban a kijelentést összekapcsoljuk a komponensekkel és a műveletekkel:

befejeződik a szemeszter	(Ha…) akkor	elutazunk Sopronba
v	→	s

Az 1) kijelentés kijelentéslogikai szerkezete (formulája): $v \rightarrow s$.

2) Szeretem a nyarat és a tengert.

A komponensek legyenek a következők:

s:= szeretem a nyarat

t:= szeretem a tengert

A táblázatban a kijelentést összekapcsoljuk a komponensekkel és a műveletekkel:

szeretem a nyarat	és	szeretem a tengert
s	∧	t

Az 2) kijelentés kijelentéslogikai szerkezete (formulája): $s \wedge t$.

A kijelentéslogikai formulákban a zárójelpárok a műveletek sorrendjének biztosításához szükségesek, így egyértelművé válik, hogy a zárójelben lévő művelettel kezdjük a végrehajtást. Ha nem szerepel zárójel, akkor először a negáció műveletét hajtjuk végre, majd balról jobbra megállapítjuk az éppen soron következő művelet logikai értékét. Ezt nevezzük a logikai műveletek végrehajtási sorrendjének (prioritásának).

Példa:

3) Ha 12 osztható 3-mal és 2-vel, akkor osztható 6-tal is.

A valóságban ezt sohasem tesszük, de a kijelentés így is elmondható:

Ha 12 osztható 3-mal és 12 osztható 2-vel, akkor 12 osztható 6-tal is.

A komponensek legyenek a következők:

p:= 12 osztható 3-mal.

q:= 12 osztható 2-vel.

r:= 12 osztható 6-tal.

A táblázatban a kijelentést összekapcsoljuk a komponensekkel és a műveletekkel, valamint a táblázat alatt szerepel a műveletek végrehajtásának sorrendje a zárójelnek megfelelően.

12 osztható 3-mal	és	12 osztható 2-vel	(Ha…) akkor	12 osztható 6-tal
(p	∧	q)	→	r

<table>
<tr><td colspan="3">1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">2</td></tr>
</table>

A 3) kijelentés kijelentéslogikai szerkezete (formulája): $(p \wedge q) \rightarrow r$.

4) Ha logikából vagy filozófiából vizsgázom, és felkészültem, akkor jó osztályzatot kapok, és nem leszek szomorú.
A komponensek legyenek a következők:
p:= Logikából vizsgázom.
q:= Filozófiából vizsgázom.
r:= Felkészültem.
s:= Jó osztályzatot kapok.
t:= Szomorú leszek.

A táblázatban a kijelentést összekapcsoljuk a komponensekkel és a műveletekkel, valamint a táblázat alatt szerepel a műveletek végrehajtásának sorrendje a zárójelnek megfelelően.

logikából vizsgázom	vagy	filozófiából vizsgázom	és	felkészültem	(Ha…) akkor	jó osztályzatot kapok	és	nem leszek szomorú
((p	∨	q)	∧	r)	→	(s	∧	⌉ t)

<table>
<tr><td colspan="3">1</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">1</td></tr>
<tr><td colspan="5">2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="9">3</td></tr>
</table>

A 4) kijelentés formulája: $((p \vee q) \wedge r) \rightarrow (s \wedge \rceil t)$.

A kijelentéslogikai formula egy interpretációján a formulában szereplő kijelentésváltozók (p, q, r,…) logikai értékének megadását értjük.

Példa:
Adjuk meg az előzőekben szerepelt két formula egy-egy interpretációját!
1) A $(p \wedge q) \rightarrow r$ formula egy interpretációja a következő logikai értékek megadása: $|p|=i$; $|q|=h$; $|r|=i$.

2) A $((p \vee q)) \wedge r) \rightarrow (s \wedge \rceil t)$ formula egy interpretációja: $|p|=i$;$|q|=i$; $|r|=h$; $|s|=i$; $|t|=h$

Megjegyezzük, hogy ha a formulában előforduló kijelentésváltozók p_1, p_2, …, p_n (n≥1), akkor a műveletek definíciója szerint a $|p_1|$, $|p_2|$,…,$|p_n|$ logikai értékek megadása esetén a formula logikai értéke egyértelműen meghatározott.

A formula összes interpretációjának a felírása 2^n sorú értéktáblázat megadásával lehetséges, mivel n kijelentésváltozónak 2^n féleképpen adhatunk logikai értékeket.

A 1) példa három változós, tehát n=3. A példa formulájának [(p ∧ q) → r)] összes interpetációját szemlélteti a következő táblázat:

Az interpretációk száma 2^3=8.

interpretációk sorszáma	|p |	| q|	| r|	|(p∧q)	→	r|
1	i	i	i	i	i	i
2	i	i	h	i	h	h
3	i	h	i	h	i	i
4	i	h	h	h	i	h
5	h	i	i	h	i	i
6	h	i	h	h	i	h
7	h	h	i	h	i	i
8	h	h	h	h	i	h
				1	2	1

A 2) példában szereplő ((p ∨ q) ∧ r) → (s ∧ ⌉ t) formula öt változós (n=5), ezért az interpretációnak száma: 2^5= 32.

Egy kijelentéslogikai formulát tautológiának, azonos igaz vagy érvényes formulának nevezünk, ha minden interpretációra a formula logikai értéke igaz.

Példa:

A (p ∧ ⌉ p) → q formula azonosan igaz (tautológia vagy érvényes) mert:

interpretációk sorszáma	|p |	| q|	|(p ∧	⌉p)	→	q|
1	i	i	h	h	i	i
2	i	h	h	h	i	h
3	h	i	h	i	i	i
4	h	h	h	i	i	h
			2	1	3	1

Példa:

1) (p ∧ (p → q)) → q formulának hány interpretációja van? A formula azonosan igaz?

Megoldás:

A formulában két logikai változó szerepel (p, q), ezért n=2. A 2^n képletbe írva az n értékét (2^2 = 4) megállapítható, hogy a formulának 4 interpretációja van.

interpretációk sorszáma	$\|p\|$	$\|q\|$	$\|((p \wedge$	$(p \to q))$	$\to$	$q\|$
1	i	i	i	i	i	i
2	i	h	h	h	i	h
3	h	i	h	i	i	i
4	h	h	h	i	i	h
			2	1	3	1

A formula azonosan igaz formula, azaz tautológia. Látható ugyanis, hogy minden interpretáció (sorok) esetén a formula logikai értéke igaz (vastag keret).

2)Hány interpretációja létezik az alábbi formulának? Tautológia az alábbi formula? $(p \wedge q) \to r$
Megoldás:
A formulában három logikai változó szerepel (p, q, r), ezért n=3. ($2^3 = 8$)
A formulának 8 interpretációja van.

interpretációk sorszáma	$\|p\|$	$\|q\|$	$\|r\|$	$\|(p \wedge q)$	$\to$	$r\|$
1	i	i	i	i	i	i
2	i	i	h	i	h	h
3	i	h	i	h	i	i
4	i	h	h	h	i	h
5	h	i	i	h	i	i
6	h	i	h	h	i	h
7	h	h	i	h	i	i
8	h	h	h	h	i	h
				1	2	1

A formula nem érvényes (nem tautológia). A táblázatból leolvasható ugyanis, hogy a második interpretáció esetén a formula logikai értéke hamis (vastag keret).

6.3.2 A következtetés

A köznapi életben és a tudományok területén rendszeresen használunk logikai következtetési eljárásokat. Így nevezzük azt a gondolkodási folyamatot, amelynek során bizonyos állításokból úgynevezett premisszákból (feltételekből) következtetünk valamilyen állítás, úgynevezett konklúzió (zárótétel) igazságára.

Helyes következtetésről beszélünk, ha minden olyan esetben amikor a feltételek logikai értéke igaz, akkor a konklúzió logikai értéke is igaz.

A definíció értelmében, ha csak egyetlen egy olyan eset van, amikor a feltételek együttesen igazak, de a konklúzió hamis, a következtetés nem helyes.

Példa
Helyes-e az alábbi következtetés:
a)

1. Ha az elem kimerült, akkor nem szól az MP3-lejátszóm.
2. Nem szól az MP3-lejátszóm.

---

3. Az elem kimerült.

Ez a következtetés nem helyes, ugyanis ha az elem nem merült ki, akkor is előfordulhat, hogy nem szól az MP3-lejátszóm, például meghibásodás miatt.

Pontosabb magyarázatot is adunk erre:
A következtetésben szereplő kijelentések a p és q egyszerű kijelentésekből épülnek fel:
p := Az elem kimerült,
q := Az MP3-lejátszóm nem szól.
Az első premissza p és q kijelentések implikációja. Az előbbi jelölést használva a következtetés szerkezete az alábbi sémával írható fel:
1. $p \to q$
2. q

---

3. p

Készítsük el a következő értéktáblázatot:

		premisszák		konklúzió
$\lvert p \rvert$	$\lvert q \rvert$	$\lvert p \to q \rvert$	$\lvert q \rvert$	$\lvert p \rvert$
i	i	i	i	i
i	h	h	h	i
h	i	i	i	h
h	h	i	h	h

Könnyen észrevehető, hogy a harmadik sorban olyan eset szerepel, amikor a premisszák ($p \to q$, illetve q) együttesen igazak, de a konklúzió (p) hamis. Ez pedig a értelmezésünk szerint elegendő ahhoz, hogy a következtetés ne legyen helyes.

Nézzünk egy újabb példát!

b)

1. Ha az elem kimerült, akkor nem szól az MP3-lejátszóm.
2. Az elem kimerült.

---

3. Nem szól az MP3-lejátszóm.

Az előző feladatban használt jelöléseket megtartva a következtetés szerkezete a következő:

1. $p \rightarrow q$
2. p

———

3. q

Elkészítve a logikai értéktáblázatot:

		premisszák		konklúzió
$\lvert p \rvert$	$\lvert q \rvert$	$\lvert p \rightarrow q \rvert$	$\lvert p \rvert$	$\lvert q \rvert$
i	i	i	i	i
i	h	h	i	h
h	i	i	h	i
h	h	i	h	h

Láthatjuk, hogy minden olyan (ebben a példában csak egyetlen) esetben amikor a premisszák ($p \rightarrow q$, p) egyszerre igazak, igaz a konklúzió (q) is. Tehát ez a következtetés már helyes.

A következtetés értelmezéséből adódik, hogy több premissza helyett vehető egy, mégpedig azok konjunkciója. A konjunkció ugyanis pontosan akkor igaz, ha mindegyik komponens igaz. Például a feladatban szereplő $p \rightarrow q$, p premisszák helyett vehető a $(p \rightarrow q) \wedge p$. A következtetés szerkezete ezért a következő alakban is felírható:

1. $(p \rightarrow q) \wedge p$

———

2. q

A fenti leírás is rövidíthető az alábbi módon: $(p \rightarrow q) \wedge p \models q$.

A következtetésnek a $\models$ a jele, amit olvasáskor a „következik” szóval helyettesítünk. A következtetések leírásán ezután ebben az egyszerű formában is megtehető.

6.3.3 Kijelentéslogikai korlátok

A eddig leírtakhoz szükséges egy kis kiegészítés, mert egyes kijelentéseknél meglepő eredményt kaphatunk. Megjegyzés a következtetésekhez:

1) Ha egy következtetés helyes, akkor ez nem azt jelenti, hogy a benne szereplő konklúzió minden körülmények között igaz, hanem csak azt, hogy amikor a premisszák együttesen igazak, akkor igaz a konklúzió is.

2) Egy következtetés helyessége nem függ a benne szereplő kijelentések tartalmától, hanem csak a következtetés szerkezetétől.

3) Ha a kijelentések szerkezetének feltartását az eddig megismert módszerekkel végezzük, akkor számolni kell bizonyos látszólagos ellentmondásokkal is.

Ennek illusztrálására vizsgáljuk meg, hogy helyes-e az alábbi következtetés?

1. A paralelogramma átlói felezik egymást.
2. A négyzet paralelogramma.

———

3. A négyzet átlói felezik egymást.

Ezt a következtetést matematikai ismereteink alapján helyesnek tartjuk. A kijelentéseket egymás után jelöljük a p, q, r-rel, így a következtetés: $p \land q \models r$.
A következtetés szerkezet bővebben:

p
q
—
r

Elkészítve az értéktáblázatot, látható, hogy a következtetés nem helyes, mivel található olyan eset, amikor a premisszák együttesen igazak a konklúzió pedig hamis. (2. sor |p|=i, |q|=i de |r|=h):

|p|	|q|	|r|
i	i	i
i	i	h
i	h	i
i	h	h
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

premisszák		konklúzió
|p|	|q|	|r|
i	i	i
i	i	h
i	h	i
i	h	h
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

Ismereteink alapján azért tartjuk helyesnek a következtetést, mert figyelembe vesszük a kijelentések tartalmát is. Ha a tartalomtól eltekintünk, és csak a szerkezetet vesszük figyelembe, akkor a következtetés nem helyes.

A „látszólagos ellentmondást” oka az, hogy nem tudtuk feltárni a kijelentések közötti kapcsolatot. Hogy ezeket a „látszólagos ellentmondásokat” is kiküszöböljük finomítani kell a módszerünket, más szóval fel kell tárni a kijelentések úgynevezett finom szerkezetét is. Ezzel a predikatumlogikában foglalkozunk, ahol erre a feladatra majd visszatérünk.

6.3.4 Gyakran használt következtetési szabályok

A kijelentés- és a predikátumkalkulus számára viszonylag könnyen lehet következtetési szabályokat megadni, amelyek megengedik a szokásos tartalmi következtetés szigorú formulázását. A következtetési szabályok mindegyike megjelent már a matematikai tanulmányainkban, de sokkal találkozhatunk a hétköznapi beszédben is.

Gondoljunk bele hányszor hangzik el hasonló fejtegetés. „Ha István eljön a szakestre, akkor Sára is. Ha Sára jön, akkor a testvére, Tibi is.” Az elmondottakból következik, hogy ha István megjelenik a szakesten, akkor biztosan ott lesz Sára és Tibi is, ha István nem megy el, akkor nem biztos, hogy a másik két illető megjelenik, de ott lehet. A fentiekben az ún. láncszabályt ismertettük, de számos más szabály létezik.

6.3.5 A leválasztási szabály (modus ponens)

Gyakran, teljesen magától értetődően használjuk ezt a szabályt. Ha egy szám 0-ra végződik, akkor osztható 5 tel. Ez a szám 0-ra végződik, tehát ez a szám osztható 5-tel.

Milyen állításokból épül fel ez a következtetés?

p:= a szám 0-ra végződik

q:= a szám osztható 5-tel

a) Ha egy szám 0-ra végződik, akkor osztható 5 tel.
b) Ez a szám 0-ra végződik,

---

c) (tehát) ez a szám osztható 5-tel.

Tehát a következtetés sémája: $(p \to q) \land p \models q$

Tétel:

T34. $\quad p \to q$

$$\frac{\begin{array}{l} p \end{array}}{q}$$

Az előzőekben már igazoltuk, hogy ez a következtetés helyes.

6.3.6 Az „elvevő" szabály (modus tollens)

Egyik leggyakrabban használt következtetési szabály: $(p \to q) \land \rceil q \models \rceil p$

Tétel:

T35. $\quad p \to q$

$$\frac{\rceil p}{\rceil q}$$

Példa:

Ha 127 osztható 6-tal, akkor (1+2+7=) 10 osztható 3-mal.
10 nem osztható 3-mal.

---

127 nem osztható 6-tal.

A szabály igazolása:

$\|p\|$	$\|q\|$	premisszák $\|p\to q\|$	$\|\neg q\|$	konklúzió $\|\neg p\|$
i	i	i	h	h
i	h	h	i	h
h	i	i	h	i
h	h	i	i	i

Az értéktáblázatból látható, hogy az elvevő szabály helyes következtetés.

6.3.7 A láncszabály (feltételes szillogizmus)

A láncszabályt hipotetikus szillogizmusnak is nevezik.

Tétel:

T36. $\mathbf{p \to q}$

$\mathbf{q \to r}$

——

$\mathbf{p \to r}$

A szabály tömören leírva: $(p \to q) \wedge (q \to r) \models p \to r$

Például:

Ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható 2-vel is.
Ha egy szám osztható 2-vel, akkor a szám páros.

Ha egy szám osztható 6-tal, akkor a szám páros.

A szabály igazolása:

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|r\|$	premisszák $\|p \to q\|$	$\|q \to r\|$	konklúzió $\|p \to r\|$
i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h
i	h	i	h	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	i
h	h	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i

A következtetés helyes mert minden olyan esetben, amikor a premisszák egyszerre igazak, igaz a konklúzió is.

6.3.8 Az indirekt bizonyítás

A matematikában gyakran alkalmazzuk ezt a következtetési szabályt. Az eljárás lényege az, hogy egy p állítást úgy bizonyítunk be, hogy megmutatjuk, hogy a tagadása nem lehet igaz, például azért, mert akkor két egymásnak ellentmondó állítás is bizonyítható.

A következtetési szabály sémája: $(\rceil p \rightarrow \rceil q) \wedge q \models p$

Tétel:

T37. $\rceil p \rightarrow \rceil q$

q

---

p

Például:

1) Tegyük fel, hogy c racionális azám.

a) Ha b+c racionális szám, akkor b is racionális szám.

b) b nem racionális szám.

---

c) b+c nem racionális szám.

2)

a) Ha véges sok prímszám van, akkor nem igaz a számelmélet alaptétele.

b) A számelmélet alaptétele igaz.

---

c) Végtelen sok prímszám van.

A szabály igazolását logikai értéktáblázattal végezzük el önállóan! Megjegyezzük, hogy az indirekt bizonyításnak ez az alakja az elvevő szabály alkalmazását jelenti.

6.3.9 A kontrapozíció („elvetési mód”)

Ha egy összetett mondatban a részmondatokat velük logikailag ekvivalens (egyenértékű) kifejezésekkel helyettesítünk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens mondatot kapunk.

Példa:

a) A versenyen (OTDK) csak jeles tanulók indulhatnak.

Vele logikailag ekvivalens: Csak az indulhat a versenyen (OTDK), aki jeles tanuló. Hiszen itt is csak a jeles tanulók indulhatnak, de nem kell minden jeles tanulónak indulnia.

A hétköznapi beszéd említett fordulataira épít a kontrapozíciós következtetési szabály. Nézzük meg ezt a következtetési módot egy példán keresztül!

Példa:
a) Ha az a szám osztható 3-mal, akkor számjegyeinek az összege is osztható 3-mal.

---

b) Ha az a szám számjegyeinek az összege nem osztható 3-mal, akkor a szám nem osztható 3-mal.

A következtetés sémája: $p \rightarrow q \models \rceil q \rightarrow \rceil p$

Tétel:

T38. $\mathbf{p \rightarrow q}$

$$\frac{}{\rceil q \rightarrow \rceil p}$$

Igazolása logikai értéktáblázattal:

				premissza	konklúzió
$\|p\|$	$\|q\|$	$\|\rceil p\|$	$\|\rceil q\|$	$\|p \rightarrow q\|$	$\|\rceil q \rightarrow \rceil p\|$
i	i	h	h	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	i	i	i

6.3.10 A diszjunktív szillogizmus (modus tollendo ponens)

A szabály jelekkel leírva: $(p \vee q) \wedge \rceil p \models q$
A következtetés sémája:

Tétel:

T39. $\mathbf{p \vee q}$

$$\frac{\rceil p}{q}$$

Példa:
A b szám osztható 2-vel vagy 3-mal.
A b szám nem osztható 2-vel.

A b szám osztható 3-mal.

A szabály igazolását végezzük el önállóan!

6.3.11 Egy különös példa

A matematikai rejtvények, fejtörők egy részét is meg lehet oldani a leckében leírt következtetések segítségével. Tekintsünk meg ehhez kapcsolódva egy példát!

Az ügyben négy lehetséges vádlott van, és el kell dönteni, hogy bűnösök vagy ártatlanok, vagy esetleg kétséges-e a szerepük az adott állítások alapján. Ezek az állítások a következők (premisszák):

1. Ha A és B mindketten bűnösek, akkor C bűntárs.
2. Ha A bűnös, akkor B és C közül legalább az egyik bűntárs.
3. Ha C bűnös, akkor D bűntárs.
4. Ha A ártatlan, akkor D bűnös.

A konklúzió elsőként az A, majd a B, ezután a C, végül a D bűnössége, azaz négy következtetést kell megnéznünk, de az azonos premisszák miatt ezt elhelyezhetjük egyetlen táblázatba is.

Formalizáljuk az állításokat! Legyenek elemi állítások a következők:

a: A bűnös
b: B bűnös
c: C bűnös
d: D bűnös

Ezek és a logikai műveletek felhasználásával az állítások:

1$(a \wedge b) \to c$
2.$a \to (b \vee c)$
3. $c \to d$
4.$\rceil a \to d$

a	$\neg a$	b	c	d	$a \wedge b$	1. áll.	2. áll.	3. áll.	4. áll.
i	h	i	i	i	i	i	i	i	i
i	h	i	i	h	i	i	i	h	i
i	h	i	h	i	i	h	i	i	i
i	h	h	i	i	h	i	i	i	i
i	h	i	h	h	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h	i	h	i	i
i	h	h	i	h	h	i	i	h	i
i	h	h	h	h	h	i	h	i	i
h	i	i	i	i	h	i	i	i	i
h	i	i	i	h	h	i	i	h	h
h	i	i	h	i	h	i	i	i	i
h	i	h	i	i	h	i	i	i	i
h	i	i	h	h	h	i	i	i	h
h	i	h	h	i	h	i	i	i	i
h	i	h	i	h	h	i	i	h	h
h	i	h	h	h	h	i	i	i	h

Feltéve, hogy mind a négy állítás igaz a táblázatból kiolvashatjuk, hogy csak D)-ről tudhatjuk biztosan, hogy bűnös, a többi gyanúsított lehet ártatlan is, bűnös is.

6.3.12 Feladatok

1) Formalizáljuk a következő kijelentést!

„Feltéve, hogy a szemtanú megbízható és az írásszakértő véleménye helytálló, a bűncselekményt akkor és csak akkor követték el előre megfontolt szándékkal, ha a talált ujjlenyomatok a tettestől vagy a tettestárstól származnak”.

2) Írjuk fel a $((p \wedge \neg q) \rightarrow r) \leftrightarrow q$ formula összes interpretációját! Érvényes-e a formula?

3) Igazolja, hogy az alábbi összefüggés tautológia: $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$!

4) Bizonyítsa be a leválasztási szabályt (modus ponens)!

1. $p \rightarrow q$
2. p

---

3. q

5) Helyes-e az alábbi következtetés?

Ha nálam van a kulcs, akkor ki tudom nyitni az ajtót.
Nálam van a kulcs.

Ki tudom nyitni az ajtót.

6) Helyes-e az alábbi következtetés?

Ha álmodom, akkor alszom.
Álmodom.

Alszom.

7) Helyes-e az alábbi következtetés:

Ha a benzin elfogyott az autóból, akkor az autó megáll.
Az autó megáll.

Elfogyott a benzin az autóból.

8) Helyes-e az alábbi következtetés?

Ha a benzin elfogyott az autóból, akkor az autó megáll.
Nem fogyott el a benzin.

Az autó nem áll meg.

9) Helyes-e az alábbi következtetés?

Ha tartozom, akkor adós vagyok.
Nem tartozom.

Nem vagyok adós.

10) Helyes-e az alábbi következtetés?
Ha egy hallgató vizsgázik, akkor felvette az adott tanegységet.
Ha felvette az adott tanegységet, akkor hallgatói jogviszonya van.

Ha egy hallgató vizsgázik, akkor hallgatói jogviszonya van.

11) Bizonyítsuk be az indirekt bizonyítást logikai értéktáblázattal!

12) Helyes-e az alábbi következtetés?
a) Ha szeretem igazán, akkor összeházasodunk.
b) Nem szeretem igazán.

---

c) Nem házasodunk össze.

13) Helyes-e az alábbi következtetés?
a) Ha a barátom, akkor moziba megyek vele.

---

b) Ha nem a barátom, akkor nem megyek vele moziba.

14) Bizonyítsuk be a diszjunktív szillogizmust logikai értéktáblázattal!

15) Döntsük el az alábbi következtetés helyességét!
A b szám osztható 2-vel vagy 3-mal.
A b szám nem osztható 2-vel.

A b szám osztható 3-mal.

16) Helyes-e az alábbi következtetés?
a) Ha a logika vizsgán jó tételt húzok, akkor jelesre vizsgázom.
b) Ha nem tanulom rendszeresen a logikát, akkor nem vizsgázom jelesre.

---

c) Ha nem tanulom rendszeresen a logikát, akkor nem húzok jó tételt a logika vizsgán.

17) Helyes az alábbi következtetés?
a) Ha 12 osztható 3-mal, akkor 12 összetett szám.
b) 12 osztható 3-mal.

---

c) 12 összetett szám.

6.4 ÖSSZEFOGLALÁS

Egy p kijelentés negációján (tagadásán) a „nem igaz, hogy p” kijelentést (vagy ennek egy nyelvtanilag átfogalmazott alakját) értjük.

Két kijelentés p és q konjunkcióján (összekapcsolásán) a p és q kijelentést (vagy ennek egy nyelvtanilag átfogalmazott alakját) értjük.

Két kijelentésnek a megengedő értelmű „vagy” kötőszóval való összekapcsolása olyan művelet, amelynek a logikai érétkek körében a diszjunkció (szétválasztás) művelete felel meg: akkor és csak akkor hamis, ha mindkét kijelentés hamis.

„Ha p, akkor q” alakú kifejezéseket (p előtagú és q utótagú) implikációnak nevezzük.

„Ha p, akkor q, és ha q, akkor p” alakú kifejezéseket ekvivalenciának nevezzük.

Néhány helyes következtetési forma: modus ponens, hipotetikus szillogizmus, indirekt bizonyítás.

6.5 ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mit nevezünk kijelentéslogikai formulának?
2. Mit értünk egy formula interpretációján?
3. Definiáljuk a tautológiát!
4. Milyen gondolkodási folyamat a következtetés?
5. Mikor helyes egy következtetés?
6. Milyen következtetési szabályokat ismerünk?

7. A KIJELENTÉSLOGIKA ALKALMAZÁSAI

7.1 CÉLKITŰZÉS

Az informatikában az eszközök (hardverelemek) tervezéséhez nélkülözhetetlen áramkörök tervezési alapjait tekintjük át. A cél, hogy az informatikai eszközök adatkezelésének elemi szintjét megismerjük.

7.2 TARTALOM

Logikai áramkörök
A konjunkció, a diszjunkció, az imlikáció, az ekvivalencia áramköri megvalósítása
Értékes azonosságok
Feladatok

7.3 A TANANYAG KIFEJTÉSE

Az informatikában az eszközök (hardverelemek) tervezésénél, azok áramköreinek összeállításánál gyakori probléma, hogy a szükséges feladatot ellátó áramkört milyen elemekből, és hogyan kell összeállítani. A matematika logika ebben az esetben egy jól meghatározott gyakorlati célt elégít ki.

7.3.1 Logikai áramkörök

A legegyszerűbb esetekben kapcsolókból (esetleg több, egyszerre működtethető kapcsolóból) és áramforrásból, fogyasztókból kell összeállítani egy megadott feladatot ellátó áramkört. Az áramkör megtervezéséhez jól hasznosíthatjuk az ítéletkalkulus eszközeit. Tekintsük át a számunkra használt logikai műveletek áramköri megvalósulását!

A kijelentéslogikai műveletek szemléltetésére kiválóan alkalmasak a logikai áramkörök. Köztük a kapcsolatot az hozza létre, hogy az áramkör zárt (vezet) vagy nyitott (nem vezet) helyzetének megfeleltethetjük a művelettel összetett kijelentés igaz vagy hamis logikai értékét. Feleltessük meg a p, q kijelentéseknek egy-egy kapcsolót a ⌉p, ⌉q kijelentéseknek pedig egy-egy fordított állású kapcsolót (16. kép).

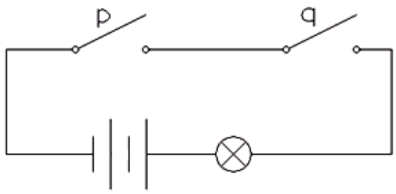
23_K16.jpg

16. kép A kijelentéseknek megfeleltetett kapcsoló és fordított állású kapcsoló

A 20. ábrán vázlatosan szemléltetett áramkör két, sorba kapcsolt kapcsolóból, egy áramforrásból és egy fogyasztóból – lámpából – áll.

7.3.2 A konjunkció

Annak a feltétele, hogy az áramkörben áram folyjék az, hogy mindkét kapcsoló – a p és a q jelű is – bekapcsolt állapotban legyen. Legyen p, q értéke i (1) akkor, ha p, q kapcsoló bekapcsolt állapotban van, egyébként értéke: h (0). Ekkor a lámpa világításának feltételét a következő módon irható fel egyszerű formában: $p \wedge q$.

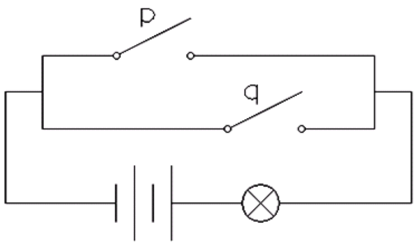


17. kép A konjunkció szemléltetése logikai áramkörrel

Ha a kijelentés igaz, akkor a neki megfelelő kapcsolót gondolatban lenyomjuk. Ezek felhasználásával p, q konjunkcióját szemléltető áramkör a két kapcsolót sorba kötve tartalmazza. Az áramkörbe helyezett izzó csak akkor világít, ha mind a két kapcsoló egyszerre zárt, megfelelően annak, hogy $p \wedge q$ csak akkor igaz, ha mind a két komponens logikai értéke igaz.

7.3.3 A diszjunkció

A diszjunkciót is szemléltethetjük logikai áramkörrel. Könnyen belátható, hogy a $p \vee q$-nak olyan áramkör felel meg, amelyben a megfelelő kapcsolók párhuzamos kapcsolásban vannak (lásd a 11. ábrán). Valóban csak akkor világít az áramkörbe helyezett izzó, ha p és q kapcsolók közül legalább az egyik zárt állapotban van, annak megfelelően, hogy $p \vee q$ kijelentés akkor igaz, ha legalább az egyik komponensnek igaz a logikai értéke.

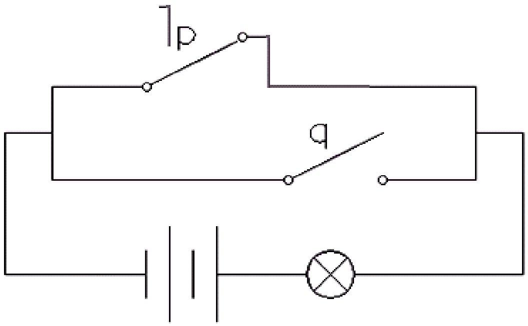


18. kép A diszjunkció szemléltetése logikai áramkörrel

7.3.4 Implikáció

Az implikáció műveletének könnyebb megértését itt is segíti a logikai áramkör. (Ezt könnyen megrajzolhatjuk a De Morgan-azonosság alapján: $|p \rightarrow q| = |\rceil(p \wedge \rceil q)| = |\rceil p \vee q|$).

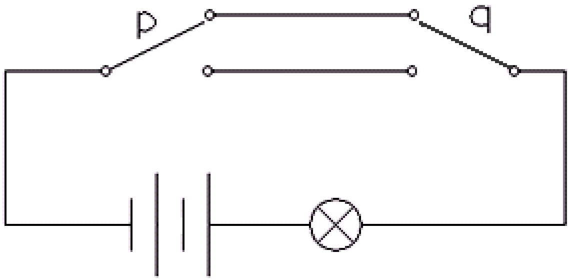
Látható, hogy az áramkörbe helyezett izzó csak akkor nem fog világítani, ha $|p|$=i és $|q|$=h, mert csak ebben az esetben lesz mindkét párhuzamosan kötött ágban megszakítva az áramkör.



19. kép Az implikáció logikai áramköre

7.3.5 Az ekvivalencia

Az ekvivalencia logikai áramkörét is megadhatjuk. Az izzó csak akkor világít, ha a kapcsolók azonos állásban (vagy lenyomva vagy nem lenyomva vannak) annak megfelelően, hogy p ↔ q logikai értéke csak akkor igaz, ha a komponensek logikai értéke azonos.



20. kép Az ekvivalencia logikai áramköre

7.3.6 Értékes azonosságok

A logikában teljesülnek az alábbi azonosságok:

1) $|p \wedge q| = |\rceil (\rceil p \vee \rceil q)|$,
2) $|p \vee q| = |\rceil (\rceil p \wedge \rceil q|$,
3) $|p \rightarrow q| = |\rceil (p \wedge \rceil q|$,
4) $|p \rightarrow q| = |\rceil p \vee q|$,
5) $|p \leftrightarrow q| = |\rceil (p \wedge \rceil q) \wedge \rceil (q \wedge \rceil p)|$,
6) $|p \leftrightarrow q| = |\rceil (\rceil (\rceil p \vee q) \vee \rceil (\rceil q \vee p))|$.

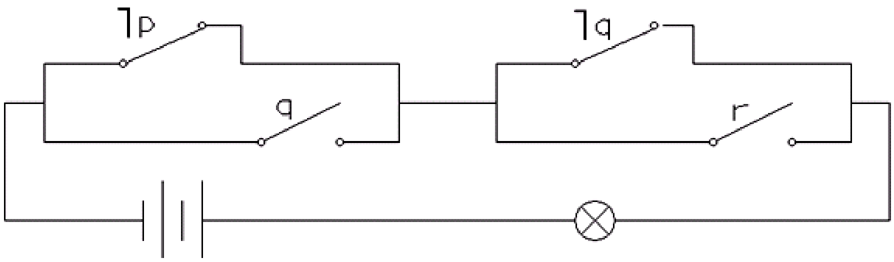
A fentiekben megismert, értéktáblázattal könnyen igazolható azonosságok is mutatják, hogy minden kétváltozós logikai művelet kifejezhető negáció és konjunkció, illetve negáció és diszjunkció segítségével. Ezért kijelenthetünk egy igen fontos tételt, amit most külön bizonyítás nélkül elfogadunk:

Tétel:

T40. Minden kijelentéslogikai formula olyan alakra hozható, amely kijelentésváltozók és a kijelentésváltozók negációinak a konjunkciója, illetve diszjunkciója.

Így bármely kijelentéslogikai formulának megfeleltethetünk egy elektromos (logikai) áramkört és fordítva. Ez teszi lehetővé , hogy kijelentéslogikai formulákat áramkörökkel, és az áramköröket kijelentéslogikai formulákkal, matematikai módszerekkel vizsgáljuk.

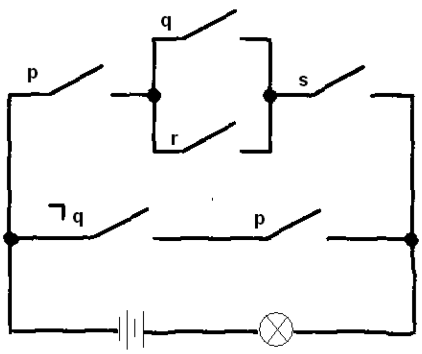
Példa:
Készítsük el a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ formula logikai áramkörét!
Megoldás:
Felhasználjuk a fenti, 4) azonosságot, így $|p \rightarrow q| = |\rceil p \vee q|$, illetve $|q \rightarrow r| = |\rceil q \vee r|$.
Vegyük a két kifejezés konjunkcióját, akkor $|(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)| = |(\rceil p \vee q) \wedge (\rceil q \vee r)|$
A $(\rceil p \vee q) \wedge (\rceil q \vee r)$ logikai formulához kapcsolódó áramkör:



21. kép A feladat logikai áramköre

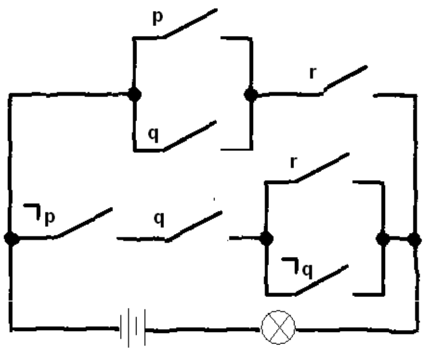
7.3.7 Feladatok

1) Írjuk fel annak feltételét, hogy a 22. képen látható áramkörben áram folyjon! (A ⌉q jelű kapcsoló a q jelűvel éppen ellentétes működésű; két azonos jelű kapcsoló egyszerre van nyitva, ill. zárva).



22. kép Az 1. feladat kézzel rajzolt logikai áramköre

2) Írjuk fel annak feltételét, hogy a 23. képen látható áramkörben áram folyjon! (A]p,]q jelű kapcsoló a p, illetve q jelűvel éppen ellentétes működésű; két azonos jelű kapcsoló egyszerre van nyitva, ill. zárva).



23. kép A 2. feladat kézzel rajzolt logikai áramköre

3) Tervezzünk olyan áramkört, amelyek a következő formulának felel meg:
(p∧(q ∨ r) ∧]r) ∨ ((]p ∧ q∧ r)!

4) Tervezzünk olyan áramkört, amelyek a következő formulának felel meg:
((p ∨ q ∨ r) ∧]t) ∨ ((]p ∨]q ∨]r) ∧ s) ∨
∨ (((q ∨]r ∨]t) ∧]p) ∨ ((]r ∨]t) ∧]q) ∨ ( ]r ∧ t))) ∧ s!

5) Egy hálókocsiban három fekvőhely van, mindhárom fekvőhelyhez egy-egy kapcsoló tartozik. A fülkében egy kis és egy nagy lámpa van. A nagy lámpa akkor ég, ha a többség akarja, a kis lámpa, pedig akkor, ha csak egy utas kapcsol.
Tervezzük meg az áramkört!

7.4 ÖSSZEFOGLALÁS

Az informatikában az eszközök (hardverelemek) tervezésénél, azok áramköreinek összeállításánál gyakori kérdés, hogy a szükséges feladatot ellátó áramkört milyen elemekből, és hogyan kell összeállítani. A matematika logika ebben az esetben egy jól meghatározott gyakorlati célt elégit ki.

Azt találtuk, hogy akár teljes diszjunktív normálforma, akár teljes konjunktív normálforma alakban bármely igazság függvény előállítható a negáció, a konjunkció és a diszjunkció műveletének segítségével.

7.5 ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mit értünk logikai értelemben egy kijelentés alatt? Mi az igazságérték?
2. Mi az igazságtáblázat szerepe?
3. Definiálja a negációt, és adja meg igazságtáblázatát!
4. Definiálja a konjunkciót, diszjunkciót, és adja meg igazságtáblázatukat!

5. Kommutatív-e, asszociatív-e a konjunkció? Bizonyítsa be!
6. Kommutatív-e, asszociatív-e a diszjunkció? Bizonyítsa be!
7. Definiálja az implikációt, és adja meg igazságtáblázatát!
8. Definiálja az ekvivalenciát, és adja meg igazságtáblázatát!
9. Kommutatív-e az implikáció és az ekvivalencia? Bizonyítsa be!
10. Mit nevezünk logikai függvénynek?
11. Rajzoljuk fel az implikáció és az ekvivalencia logikai áramkörét!

8. A PREDIKÁTUMLOGIKA ELEMEI

8.1 CÉLKITŰZÉS

Első fokozatú predikátumkalkulus alapjaihoz szükséges fogalmak, mint a predikátum, konkretizáció, kvantifikáció megismerése és gyakorlati szintű elsajátítása. A predikátumok igazsághalmazának, kvantifikáció utáni logikai értékének megállapítása, a prédikátumok tagadása, mint feladatokban alkalmazandó műveletek megtanulása.

8.2 TARTALOM

A predikátumlogika szerepe
A predikátum
A konkretizáció
A predikátum igazsághalmaza
A kvantifikáció
A prédikátum logikai értéke
A predikátum tagadása
Feladatok

8.3 A TANANYAG KIFEJTÉSE

8.3.1 A predikátumlogika szerepe

A matematikai elméletek formalizálására a kijetentéskalkulus (kijelentéslogika) még nem elég, erre vonatkozóan már egy példa kapcsán tettünk megjegyzést a kijelentéslogikánál. A kijelentések belső szerkezetének a feltárása úgynevezett predikátumokkal történik ezért foglalkozunk a predikátumlogika elemeivel. A leckében pontosabban az első fokozatú predikátumkalkulust tárgyaljuk.

A kijelentések további vizsgálatánál szubjektumokba, predikátumokba és ún. kvantifikálandó beszédrészekbe ütközünk, mint „mindegyikre” és „létezik”. Szubjektumok individuumok meghatározott, előre megadott halmazából vett dolgok megjelölésére szolgáló nevek, a predikátumok, relációk nevei az individuumoknak ezen a halmazán. Az egy bemenetelű predikátumokat tulajdonságoknak is nevezzük.

A prédikátumlogika tárgyalásánál, azaz műveleteinél és az állítások bizonyításánál erősen kapcsolódunk a halmazelméletnél tanultakra. A feladatok ilyen módon történő vizualizálása a könnyebb megértést célozza, így mellőzhetjük a hosszú, nehezebben átlátható algebrai levezetéseket.

8.3.2 A predikátum

A beszédünkben sokszor nem nevezzük meg konkrétan a kijelentések alanyát. Az ilyen esetekben nem tudjuk megmondani, hogy a kijelentésünk igaz vagy hamis, de mégis kijelentésnek érezzük.

Példa:
Valaki megmondta az eredményt.
Valamennyit hozzá kell adni, és akkor megkapjuk a 100%-ot.

Néhány évvel ezelőtt kezdtem el lovagolni.
Valamelyik kabát még biztosan kapható.

A fenti esetek leírására az általános iskolában az ún. nyitott mondatokat használtuk, így a feladatok megoldásához egyszerűbb a jegyzetelés. A logikában az általunk már ismert nyitott mondatot nevezzük predikátumnak.

Példa:
Nyitott mondatok:
a) (⌂ – 3) / 11 = 250
b) ▲ gyors autó
c) ⌂ egy kellemes illatú parfüm

Predikátumnak nevezzük az olyan kijelentő mondatot, amely egy vagy több változótól függ, és amely ezen változók minden megengedett rögzített értékeire egy kijelentést ad.

A prédikátumot nagy betűvel jelöljük: P, Q, R, T stb.

A prédikátum tehát egy vagy több változótól függ, vagyis a változók helyére kell egy konkrét személyt, számot, tárgyat stb. beírni. A változók egy konkrét halmaz elemei lehetnek , pl. számok, geometriai alakzatok stb. A prédikátumok jelölése (nagy betűk) mellett a változókat felsoroljuk. Jelölése többféleképpen történhet:
a) P⌂, P▲, … predikátumokban a ⌂, ▲ stb. jelek a változók.
b) Qx, Ty, … predikátumokban a x, y stb. jelek a változók.
c) Rxyz predikátumban az x, y, z stb. jelek a változók.
d) $P(x_1; x_2; \ldots; x_n)$,...predikátumban az $x_1; x_2; \ldots; x_n$. jelek a változók.
e) $Px_1x_2\ldots x_n$,... predikátumban az $x_1; x_2; \ldots; x_n$ jelek a változók.
A jegyzetben a b) jelölést használjuk az esetek többségében, mert egyváltozós predikátumokkal foglalkozunk.

A változók számától függően beszélünk egyváltozós, kétváltozós, n-változós predikátumokról.

Példa
a) Pxyz: „x + y = z” egy három változós predikátum, amelyben az x; y; z változók pl. valós számok.
P(5; 10; 15) : „5 + 10 = 15” igaz kijelentés, míg
P(13; 1; 21) : „13 + 1 = 21” pedig hamis kijelentés.
b) Tx: „x > 0” egy, a valós számok halmazán értelmezett egyváltozós predikátum
c) Sxy: „x > y” egy, az egész számok halmazán értelmezett 2-változós predikátum.

A változókról fontos tudni, hogy egy adott prédikátum (nyitott mondat) a változó helyére melyik halmaz elemei közül választhatunk. Ezt a halmazt a halmazelméleti ismereteink alapján alaphalmaznak (univerzumnak) nevezzük és U-val jelöljük. Szabatosan mindezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a predikátumot az adott alaphalmazon értelmezzük. Az alaphalmazt a feladatok többsége rögzíti. Az alaphalmaz meghatározása el is maradhat a feladatokban, ha az egyértelmű, vagy a meghatározásának nincs nagy jelentősége.

Példa:
Az a), b), c) predikátumoknál alaphalmazok lehetnek például a következők:

nyitott mondat	matematikai jelöléssel	hivatkozás a logikában
a) ⌂ + 2 = 3	x + 2 = 3	P⌂, Px
b) ▲ jeles tanuló	x jeles tanuló	P▲, Px
c) ◊ barátja □-nak	x barátja y-nak	P◊□, Pxy

a) U:={A természetes számok halmaza.}
b) U:={Az első évfolyamos tanulók halmaza.}
c) U:={Egy iskola tanulóiból képezett (rendezett) tanulópárok halmaza.}

8.3.3 A konkretizáció

A predikátum (nyitott mondat) nem kijelentés, így logikai érték nem rendelhető hozzá. Ha a hétköznapi nyelvben azt mondjuk, hogy „az a valaki a barátom”, akkor nem tudjuk megmondani, hogy ez igaz vagy sem. Ahhoz, hogy igazzá tegyük a valaki, vagyis a prédikátumban a változók helyett konkrét nevet kell szerepeltetni, pontosabban az alaphalmaz egy elemét. A leírtakból következik, hogy minden predikátumból kaphatunk kijelentést.

Konkretizációnak nevezzük azt a műveletet, amelyek során a predikátumban szereplő változók helyére az alaphalmaz konkrét elemét tesszük.

Példa:
A pontosabb megértésért nézzük a következő feladatot:
Tekintsük az U := {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} univerzumon értelmezett Nx := x pozitív szám és Px := x páros szám egyváltozós predikátumokat.
Nx-ből és Px-ből kijelentést kapunk, ha x helyére az alaphalmaz konkrét elemét írjuk.
- Vegyük például az N2 kijelentést, ami a „2 pozitív szám” kijelentés jelölése.
- Hasonlóan P24 a „24 páros szám” kijelentés jelölése.
- Az így kapott kijelentésekhez már logikai érték is rendelhető:
|N2| = i, |P24|=i, de |N(-3)|=h, |P1| = h.

8.3.4 A predikátum igazsághalmaza

Látható, hogy az alaphalmaz nem minden eleme teszi igazzá a Px, illetve Nx predikátumokat.

A predikátum igazsághalmaza: az alaphalmaz azon elemeinek az összességét, amelyekkel a predikátumokból (nyitott mondatból) konkretizációval előálló kijelentések igazak, az adott predikátum (nyitott mondat) igazsághalmazának nevezzük.

Példa:
Ezen értelmezés szerint feladatunkban szereplő Nx és Px predikátumok igazsághalmaza: {1, 2, 3, 4}, illetve {-4, -2, 0, 2, 4}.
Az előzőekben már szerepelt a), b), c) predikátumok igazsághalmaza az alaptartomány esetén:
a) predikátum igazsághalmaza az {1} halmaz,

b) predikátum igazsághalmaza a 7. osztály jeles tanulóinak halmaza;
c) nyitott mondaté pedig az iskola baráti kapcsolatban lévő tanulópárjainak a halmaza.

Gyakran találkozunk a következő vagy ezekhez hasonló mondatokkal is.
a) Minden hallgató a vizsgáit elsőre abszolválja.
b) Van olyan ember, aki sportol és idegen nyelvet tanul.
c) Minden négyzet paralelogramma.
d) Van páros prímszám.
e) Minden paralelogramma négyzet.
f) Minden egész szám osztható 2-vel.

Az a)-f) mondatok kijelentések, mert egy adott alaphalmazon (univerzumon) vagy igazak vagy hamisak. A fenti kijelentések logikai értéke jelentős mértékben függ az alaphalmaz választásától.

Példa:
Az a) kijelentés logikai értéke például a hazai hallgatók halmazán nem igaz, de egy kiváló képességű csoport tagjainak halmazán lehet igaz. A b) kijelentés a bolygó tanárainak halmazán igaz, ha a tapasztalatainkat figyelembe vesszük, de elképzelhető egy olyan társasház, amely a lakóinak halmazán ez nem igaz.
A c) kijelentés logikai értéke például az Euklideszi geometriában a síkbeli négyszögek halmazán igaz, ezzel szemben az e) kijelentés a síkbeli négyszögek halmazán hamis kijelentés. A d) kijelentés pedig az egész számok halmazán szintén a középiskolai tanulmányaink alapján igaz.
Az f) kijelentés az egész számok halmazán mint alaphalmazon, vagy az U := {1, 2, 5, 7, 8} alaphalmazon hamis, de mondjuk a páros egész számok halmazán igaz.

Az a) – f) kijelentések a logikai tartalom megsértése nélkül (az említett alaphalmazokon) átfogalmazhatók a következőképpen:
a) Minden x-re igaz, hogy ha x hallgató, akkor x a vizsgáit elsőre abszolválja.
b) Van olyan x ember, amely x ember sportol és x ember idegen nyelvet tanul.
c) Minden x-re igaz, hogy ha x négyzet, akkor x paralelogramma.
d) Van olyan x szám, hogy x páros szám és x prímszám.
e) Minden x-re igaz, ha x paralelogramma, akkor x négyzet.
f) Minden x-re igaz, hogy ha x egész szám, akkor x osztható 2-vel.

A kijelentésekben rendre az alábbi prédikátumok szerepelnek:
a) Hx := x hallgató; Vx := x a vizsgáit elsőre abszolválja
b) Sx := x ember sportol; Ix := x ember idegen nyelvet tanul
c) Nx := x négyzet; Px := x paralelogramma
d) Qx := x páros szám; Tx := x prímszám
e) Px := x paralelogramma; Nx := x négyzet.
f) Zx := x egész szám; Kx := x osztható 2-vel.

Megfigyelhetjük, hogy a predikátumok a kijelentések körében korábban megismert kötőszavakkal kapcsolódnak.

Példa:
a d) alatt az „és” kötőszó szerepel:

az x páros szám és az x prímszám. Jelölése: Qx ∧ Tx.

8.3.5 A kvantifikáció

Az eddig megismert és használt logikai műveleteket (⌉, ∧, ∨, → , ↔) alkalmazhatjuk a predikátumokra (nyitott mondatokra) is. Ezek eredménye összetett predikátum, tehát sem a komponenseknek, sem a műveletek eredményének nincs logikai értéke. (Logikai értéket csak kijelentésekhez rendelhetünk.)

Megfigyelhetjük, hogy az a)- f) mondatok mindegyike a „minden x”-re illetve a „van olyan x” szöveggel kezdődik. Ezeket ∀x, illetve ∃x szimbólummal jelöljük.

A ∀ jelet univerzáliskvantornak, a ∃ jelet egzisztenciális kvantornak, ezek predikátumokra való alkalmazását kvantifikációnak nevezzük.

Így a (nyitott mondatoknál) predikátumoknál bevezetett jelölések felhasználásával az előbbi kijelentések röviden a következőképpen írhatók fel:

a) ∀x (Hx → Vx)
U := {Magyarországon tanuló hallgatók}
b) ∃x (Sx → Ix)
U := {Magyarország lakossága}
c) ∀x (Nx → Px),
U := {síkbeli négyszögek},
d) ∃x (Qx → Tx),
U := {egész számok},
e) ∀x (Px → Nx),
U := {síkbeli négyszögek},
f) ∀x (Zx → Kx)
U := {Egész számok halmaza}

Fontos tudni, hogy a „minden” szó helyettesíthető a bármely, valamennyi, tetszőleges, akármelyik stb., illetve a „van” szó helyettesíthető a létezik, néhány, található, előfordul stb. szavakkal.

8.3.6 A prédikátum logikai értéke

A „minden x-re” és a „van olyan x” szöveg az olyan nyitott mondatokat, amelyekben változóként csak az x szerepel, kijelentésekké teszi. Ezek logikai értékét a következőképpen értelmezzük.

Legyen Px predikátum, amely egy nem üres alaphalmazon van értelmezve. A „minden x-re Px” kijelentés logikai értéke igaz, ha az alaphalmaz bármely a elemére Pa kijelentés logikai értéke igaz; hamis, ha van az alaphalmaznak legalább egy olyan b eleme, amelyre Pb logikai értéke hamis.

A „van olyan x, amelyre Px” kijelentés logikai értéke igaz, ha van az alaphalmaznak legalább egy olyan c eleme, amelyre Pc logi-

kai értéke igaz; hamis, ha az alaphalmaz minden d elemére Pd logikai értéke hamis.

Példa:
Az elmondottak gyakorlására állapítsuk meg a következő kijelentések logikai értékét:
a) Van olyan ember, aki sportol. (Alaphalmaz := hallgatók halmaza)
b) Minden oktató szőke. (Alaphalmaz := hazai egyetemek és főiskolák oktatói)
Megoldás:
Az a) kijelentés logikai értéke igaz, a b) kijelentés logikai értéke hamis.

8.3.7 A predikátum tagadása

A „minden x-re Px”, illetve a „van olyan x, amelyre Px” típusú kijelentések tagadásánál a kvantor helyére a másik kvantort írjuk (a minden x-re, illetve a van olyan x, amelyre alakok felcserélődnek), továbbá negáljuk a predikátumot (Px helyett ⌉ Px kerül).
A bevezetett szimbólumokkal:
a) $|\rceil \forall x\ Px| = |\exists x \rceil Px|$,
b) $|\rceil \exists x\ Px| = |\forall x \rceil Px|$.
Példa:
a) $\forall x$ Px típusú prédikátum: Minden hallgató vizsgázott.
köznyelvi (helyes) tagadása :Nem minden hallgató vizsgázott.
negációja a fenti szabály szerint ($\exists x \rceil Px$): Van olyan hallgató, aki nem vizsgázott.
b) $\exists x$ Px típusú prédikátum: Van olyan hallgató, aki vizsgázott.
köznyelvi (helyes) tagadása: Nincs olyan hallgató, aki vizsgázott.
negációja a fenti szabály szerint ($\forall x \rceil Px$): Minden hallgató nem vizsgázott.
köznyelvi (helyes) tagadása: Egy hallgató sem vizsgázott.

8.3.8 Feladatok

Logikai érték

1) Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét!
a) Van olyan növény, amelyik kétszikű. (Alaphalmaz := növények halmaza)
b) Minden ember kékszemű. (Alaphalmaz := Magyarországon élő emberek)
c) Van olyan trapéz, amelyik nem paralelogramma.
d) Az élőlények élete korlátozott.

Tagadás

2) Képezzük a következő kijelentések tagadását!
a) Van olyan növény, amelyik kétszikű. (Alaphalmaz := növények halmaza)
b) Minden ember kékszemű. (Alaphalmaz := Magyarországon élő emberek).
c) Van olyan trapéz, amelyik nem paralelogramma.
d) Az élőlények élete korlátozott. (Alaphalmaz := élőlények halmaza).

8.4 ÖSSZEFOGLALÁS

Az első fokozatú predikátumkalkulus alapjaihoz szükséges fogalmakat ismertünk meg, mint a predikátum, konkretizáció, kvantifikáció, ezeket a gyakorlati szinten is megvizsgáltuk. Megállapítottuk a predikátumok igazsághalmazát, a kvantifikáció utáni logikai értékét, foglalkoztunk a prédikátumok tagadásával.

8.5 ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Definiáljuk a konkretizáció műveletet!
2. Mit értünk egy predikátum igazsághalmazán?
3. Értelmezzük Px predikátum kvantifikációját! Hogyan értelmezzük a kvantifikációval kapott kijelentések logikai értékét?
4. Milyen műveleteket végezhetünk predikátumokkal?

9. PREDIKÁTUMLOGIKAI KÖVETKEZTETÉSEK

9.1 CÉLKITŰZÉS

Az első fokozatú predikátumkalkulus megismerése. A predikátumokkal kapcsolatos műveletek megismerése, mint a negáció, a konjunkció, a diszjunkció, az implikáció, az ekvivalencia. Venn-diagram segítségével a bizonyítási igény kialakítása, a következtetések helyességének megállapítása.

9.2 TARTALOM

Műveletek predikátumokkal.
A predikátum és a negáltja.
A predikátumok konjunkciója és diszjunkciója.
A predikátumok implikációját és ekvivalenciája.
Következtetés Venn-diagram segítségével.
A helyes következtetés.
Példa a következtetésre.
Feladat.

9.3 A TANANYAG KIFEJTÉSE

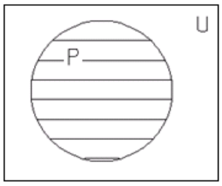
9.3.1 Műveletek predikátumokkal

A továbbiakban csak egyváltozós predikátumok szerepelnek. Legyen Px és Qx tetszőleges U nem üres ($U \neq \emptyset$) alaphalmazon értelmezett predikátum. Jelöljük ezek igazsághalmazát P-vel és Q-val. Predikátumokból logikai műveletekkel képzett összetett predikátumok igazsághalmazait – az igazsághalmaz és a logikai műveletek értelmezése alapján – az alábbi módon szemléltethetjük Venn-diagrammal.

A prédikátum és annak tagadása (negáltja) után két prédikátum konjunkcióját, diszjunkcióját, implikációját és ekvivalenciáját tekintjük át, de a definíciók helyett a műveletek igazsághalmazát Venn-diagramon ábrázoljuk.

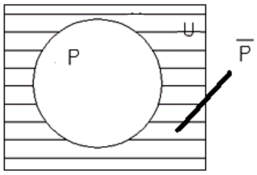
9.3.2 A predikátum és a negáltja

A prédikátumot egy alaphalmazon (U) az alaphalmaz részhalmazaként ábrázolhatjuk.



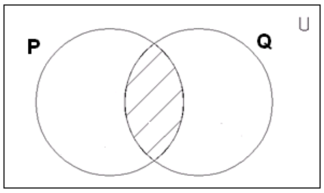
24. kép Px prédikátum igazsághalmazának ábrázolása a P halmazzal

A prédikátum tagadását egy halmaz komplementereként fogjuk fel.

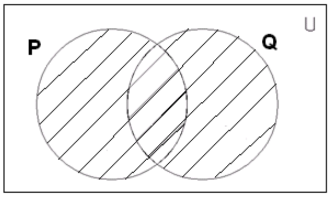


25. kép ⌉Px prédikátum igazsághalmazának ábrázolása a P halmaz komplementereként (~P)

9.3.3 A predikátumok konjunkciója és diszjunkciója



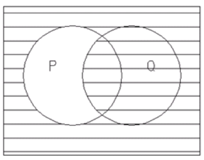
26. kép Px∧Qx prédikátum igazsághalmazának ábrázolása a P és Q halmaz metszeteként (P∩Q)



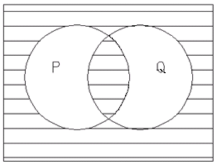
27. kép Px∨Qx prédikátum igazsághalmazának ábrázolása a P és Q halmaz egyesítettjeként (P∪Q)

9.3.4 A predikátumok implikációja és ekvivalenciája

Mivel az implikáció és az ekvivalencia kifejezhető három logikai művelet (⌉, ∧, ∨) segítségével, az előzőek alapján megadható, az implikációval és az ekvivalenciával összekapcsolt predikátumok (nyitott mondatok) Venn-diagramja is.



28. kép Px → Qx := ⌉(Px ∧ ⌉Qx) prédikátum igazsághalmazának ábrázolása P és Q halmaz különbségeként (P \ Q)



29. kép $Px \leftrightarrow Qx := (Px \rightarrow Qx) \wedge (Qx \rightarrow Px)$ prédikátum igazsághalmazának ábrázolása P és Q halmaz szimmetrikus különbségeként $((P \setminus Q) \cup (Q \setminus P))$-

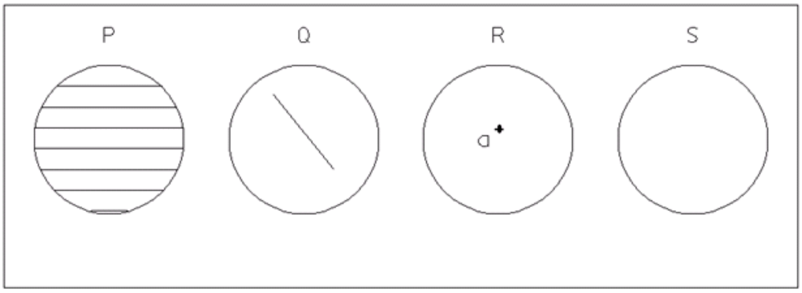
9.3.5 Következtetés Venn-diagram segítségével

A korábbiakban már foglalkoztunk azzal, hogyan jutunk az egyváltozós (nyitott mondatokból) predikátumokból kijelentésekhez. Egyik ilyen mód, hogy a predikátumba az alaphalmaz egy konkrét elemét írjuk, azaz konkretizálunk. Másik lehetőség az, hogy a predikátumot ellátjuk a „minden x-re igaz, hogy” illetve a „van olyan x, amelyre” szöveggel, más szóval lezárjuk a (nyitott mondatot) predikátumot (kvantifikációt végzünk).

A predikátumokból – az előbb említett módok egyikével – kapott kijelentéseknek feleltessünk meg az alaphalmaz részhalmazaira vonatkozó állításokat, és ábrázoljuk ezeket az állításokat Venn-diagramon. Az ábrázoláshoz a következő jelöléseket fogjuk használni.

Ha az alaphalmaz egy részhalmaza üres (nincs benne elem), akkor azt bevonalkázással; ha egy részhalmazban van elem, akkor ezt egy – a részhalmazba húzott – szakasszal jelöljük. Ha azt is tudjuk, hogy mely elem van a részhalmazban, akkor azt az elemet beírjuk a halmazba, míg ha egy részhalmazban semmi jel sincs, akkor azt mondjuk, hogy erről a részhalmazról nincs semmi információnk.

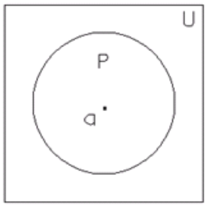
A következő ábra azt mutatja, hogy P = Ø; Q ≠ Ø; $a \in R$, S-ről pedig nincs információnk.



30. kép Jelölések: P = Ø; Q ≠ Ø; $a \in R$; S-ről pedig nincs információ

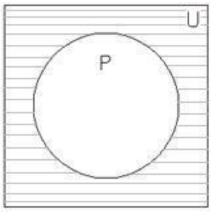
Legyenek Px, Qx egy tetszőleges U alaphalmazon értelmezett predikátumok. Jelölje P, illetve Q a Px, illetve Qx igazsághalmazát. A továbbiakban ezen predikátumokból kijelentéseket képezünk, s ábráinkon feltüntetjük a megfelelő Venn-diagramokat.

Pa (Pa az a kijelentés, amely a Px predikátumból x = a konkretizációval keletkezett.)



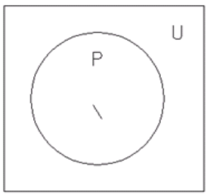
31. kép *Pa kijelentés ábrázolása*

$a \in P$



32. kép *Minden x-re igaz, hogy Px*

$\sim (U \setminus P) = \emptyset$

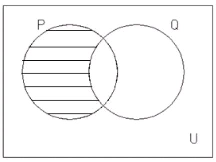


33. kép *Van olyan x, amelyre Px.*

$P \neq \emptyset$

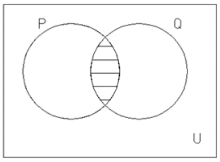
Az előző három megfeleltetés, valamint a logikai műveletek tulajdonságai alapján megadható az összetett (nyitott mondatokból) predikátumokból kapott kijelentések Venn-diagramja is.

Példa



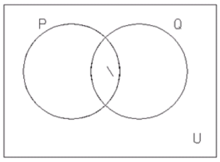
34. kép *Minden x-re igaz, hogy (ha Px, akkor Qx)*

$P \setminus Q = \emptyset$



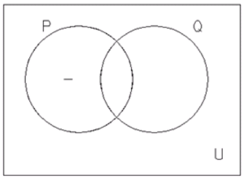
35. kép *Minden x-re igaz, hogy (ha Px, akkor nem Qx).*

$P \cap Q = \emptyset$



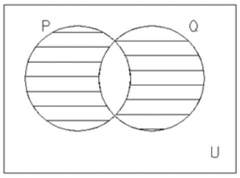
36. kép *Van olyan x, amelyre (Px és Qx).*

$P \cap Q \neq \emptyset$



37. kép *Van olyan x, amelyre (Px és nem Qx).*

$P \setminus Q \neq \emptyset$



38. kép *Minden x-re igaz, hogy (Px akkor és csak akkor, ha Qx).*

$(P \setminus Q) \cup (Q \setminus P) = \emptyset$

9.3.6 A helyes következtetés

Az egyváltozós predikátumokból konkretizációval, illetve lezárással (kvantifikációval) kapott kijelentések között is vizsgálhatjuk, hogy fennáll-e a következtetési reláció. Tudjuk, hogy egy következtetés premisszákból és konklúzióból áll. Korábbi ismereteinkkel összhangban egy következtetés akkor helyes, ha minden olyan esetben, amikor minden premissza igaz, igaz a konklúzió logikai értéke is.

Ha egy következtetés helyes, akkor helyes minden olyan következtetés, amelynek a premisszái és a konklúziója az adott következtetés premisszáival, illetve konklúziójával azonos szerkezetűek, azaz a következtetés helyessége a kijelentések szerkezetétől függ és nem a premisszák és a konklúzió tartalmától.

Az eddig megismert következtetések helyességét egyszerűen eldönthettük logikai értéktáblázat segítségével. Ennek a módszernek – a kijelentések szerkezetének predikátumokkal való feltárásakor – nincs megfelelője. Ha továbbra is csak olyan kijelentéseket vizsgálunk, amelyek egyváltozós (Px, Qx, …) predikátumokból épülnek fel, akkor az ilyen kijelentések közötti következtetési reláció teljesülését vagy nem teljesülését eldönthetjük Venn-diagramok segítségével.

Egy következtetés akkor és csak akkor helyes, ha a premisszák közös Venn-diagramja részként tartalmazza a konklúzió Venn-diagramját.

9.3.7 Példa a következtetésre

a) A paralelogramma átlói felezik egymást.
b) A négyzet paralelogramma.

---

c) A négyzet átlói felezik egymást.

Ezt a következtetést egyszer már vizsgáltuk, s ott nem találtuk helyesnek, bár ismereteink szerint helyes. Ezt az „ellentmondást” azzal indokoltuk, hogy a kijelentéseknek csak a durva (külső) szerkezetét tártuk fel, s így nem találtunk kapcsolatot a három kijelentés között. Bontsuk fel a kijelentéseket predikátumok segítségével, azaz adjuk meg a kijelentések finom (belső) szerkezetét.

Legyen a tárgyalás alaphalmaza (U) a síkbeli négyszögek halmaza.
Px := x paralelogramma.
Ax := x átlói felezik egymást.
Nx := x négyzet.

Ezekkel a predikátumokkal a következő módon fogalmazhatjuk meg az előbbi következtetésben szereplő kijelentéseket.

a) Minden x-re igaz, hogy (ha Px, akkor Ax).
b) Minden x-re igaz, hogy (ha Nx, akkor Px).

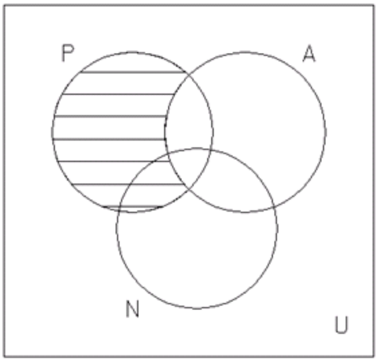
---

c) Minden x-re igaz, hogy (ha Nx, akkor Ax).
Rövidebben:
a) $\forall x\ (Px \rightarrow Ax)$
b) $\forall x\ (Nx \rightarrow Px)$

---

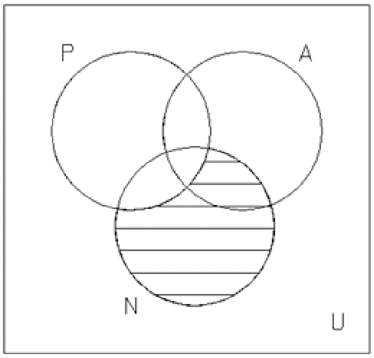
c) $\forall x\ (Nx \rightarrow Ax)$

Az a), b) és a c) kijelentések Venn-diagramja rendre a következő
a) $P \setminus A \neq \emptyset$



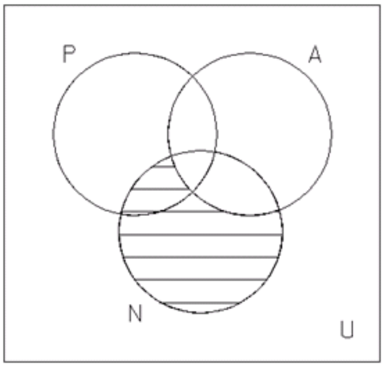
39. kép Az a) kijelentés Venn-diagramja

b) N \ P = Ø



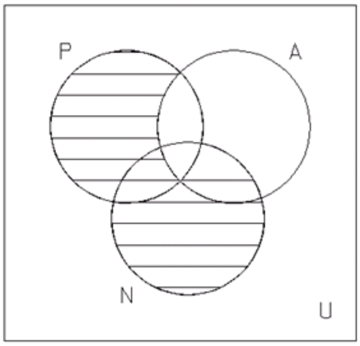
40. kép Az b) kijelentés Venn-diagramja

c) N \ A = Ø



41. kép A c) kijelentés Venn-diagramja

(Px, Ax és Nx prédikátumok igazsághalmaza rendre P, A és N.)



42. kép A két premissza közös Venn-diagramja

Látható, hogy a premisszák [a), b)] közös Venn-diagramja részként tartalmazza a konklúzió [c)] Venn-diagramját, tehát a következtetés helyes.

9.3.8 Feladat

Műveletek prédikátumokkal

1) Szemléltessük Venn-diagrammal a Px → Qx és a Px ↔ Qx igazsághalmazát, ha Px illetve Qx igazsághalmaza P, illetve Q!

2) Tekintsük az U := {-10, -9, …, -1, 0, 1, 2, …, 9, 10} alaphalmazon értelmezett Px := „x pozitív szám” és Qx := „5 osztója x-nek” predikátumokat. Szemléltessük Venn-diagramon a következő predikátumok igazsághalmazát!
a) Px ∧ Qx,
b) Px ∨ Qx,
c) Px → Qx,
d) Px ↔ Qx.

Következtetés

3) Helyes-e a következő következtetés?
1. A paralelogramma szemben fekvő oldalai párhuzamosak.
2. A rombusz szemben fekvő oldalai párhuzamosak.

---

3. A rombusz paralelogramma.

4) Helyes-e a következtetés?
a) A 4-gyel osztható számok párosak.
b) A 2-re végződő számok párosak.

---

c) A 2-re végződő számok oszthatók 4-gyel.

5) Helyes-e a következtetés?

a) Aki kíváncsi, hamar megöregszik.
b) Van kíváncsi állat.

---

c) Van hamar öregedő állat.

6) Képezzük a következő „minden x-re Px”, illetve „van olyan x, amelyre Px” típusú kijelentések tagadását!

a) Minden bogár ízeltlábú.
b) Van olyan bogár, amelyik nem rovar.
c) Van kíváncsi állat.
d) Minden négyzet téglalap.

7) Helyes-e a következtetés? U:={állatok}

a) Minden rovar ízeltlábú.
b) Nincs olyan bogár, amelyik nem rovar.

---

c) Minden bogár ízeltlábú.

9.4 ÖSSZEFOGLALÁS

Az első fokozatú predikátumkalkulus megismerése. A predikátumokkal kapcsolatos műveletek megismerése, mint a negáció, a konjunkció, a diszjunkció, az implikáció és az ekvivalencia. Venn-diagram segítségével a bizonyítási igény kialakítása, a következtetések helyességének megállapítása.

9.5 ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mikor helyes egyváltozós predikátumokból konkretizációval, illetve kvantifikációval képezett kijelentések között értelmezett következtetés?

10. LECKÉK FELADATAINAK MEGOLDÁSA

10.1 CÉLKITŰZÉS

A tananyagban szereplő feladatok ellenőrzése, a nehezen megoldható feladatoknál a megoldási lépések megismerése. A fejezet a zárthelyi dolgozatra való készülésnél is sok segítséget nyújt.

10.2 TARTALOM

Alapfogalmak
Logikai műveletek
Halmazelmélet
Kijelentéslogika
A kijelentéslogika alkalmazásai
A prédikátumlogika elemei
Predikátumlogikai következtetések

10.3 A TANANYAG KIFEJTÉSE

10.3.1 Alapfogalmak

1) Kijelentések-e a következő mondatok? (Indokoljuk állításunkat!)
a) Budapest Magyarország fővárosa 2010-ben.
b) Hány óra van?
c) 3 nagyobb, mint 2.
d) A tanárunk szigorú.
e) Bár vakáció lenne!
f) Ákos nem szemüveges fiú.

Megoldás:
Azokat a kijelentő mondatokat nevezzük kijelentéseknek, amelyek igazak vagy hamisak, így:
a) kijelentés
b) nem kijelentés, mert kérdés
c) kijelentés
d) nem kijelentés, mert több tanárunk is lehet, így nem dönthető el, hogy igaz vagy hamis az állítás
e) nem kijelentés, mert óhajtó mondat.
f) nem kijelentés, mivel az alanyt nem ismerjük, de egy bizonyos körben, ahol egyértelmű, hogy kit azonosítunk így lehet kijelentés

2) Állapítsa meg, hogy kijelentések-e a következő mondatok! Indokolja válaszát!
a) Sokáig tart még az út?
b) Bárcsak jeles lenne a zárthelyi dolgozatom!
c) Magyarország fővárosa Tiszafüred.

d) Három kisebb négynél.
e) A könyvtárak kulturális intézmények.
f) Legyen szíves aláírni!
g) De megszúrtam a kezem!

Megoldás:
a) nem kijelentés, mert kérdés
b) nem kijelentés, mert óhajtó mondat
c) kijelentés, mert egyértelmű, hogy egyik időintervallumban sem volt Tiszafüred hazánk fővárosa, ezért eldönthető a logikai értéke, hogy igaz vagy hamis. A logikai érték eldöntéséhez további információkra lenne szükség.
d) kijelentés, mert eldönthető a logikai értéke, hogy igaz vagy hamis.
e) kijelentés, mert eldönthető a logikai értéke, hogy igaz vagy hamis.
f) nem kijelentés, mert felszólító mondat
g) nem kijelentés, mert felkiáltó mondat

3) Jelöljük az alábbi kijelentéseket különböző kijelentésváltozókkal!
a) 1932-ben, Cserépfalu határában, a Subalyuk-barlangban neandervölgyi ember leleteket találnak: egy gyermek koponyáját, egy nő állkapcsát és néhány töredékes vázcsontját.
b) A Német Szövetségi Köztársaság (NSZK) 1955-ben a NATO tagja lett.

Megoldás:
a) jelöljük s kijelentésváltozóval (a Subalyuk-barlang miatt egyszerűbb megjegyezni), mindez jelöléssel: s:=1932-ben, Cserépfalu határában, a Subalyuk-barlangban neandervölgyi ember leleteket találnak: egy gyermek koponyáját, egy nő állkapcsát és néhány töredékes vázcsontját.
olvasva: p (kijelentésváltozó) legyen egyenlő „1932-ben, Cserépfalu határában, a Subalyuk-barlangban neandervölgyi ember leleteket találnak: egy gyermek koponyáját, egy nő állkapcsát és néhány töredékes vázcsontját”.
b) jelöljük n kijelentésváltozóval (a Német Szövetségi Köztársaság kezdőbetűje miatt egyszerűbb megjegyezni), mindez jelöléssel: v:=A Német Szövetségi Köztársaság (NSZK) a NATO tagja lesz1955-ben olvasva: v (kijelentésváltozó) legyen egyenlő „A Német Szövetségi Köztársaság (NSZK) a NATO tagja lesz1955-ben”.

4) Állapítsuk meg a kijelentések logikai értékét!
a) A Tisza-tó egy mesterséges tó.
b) Karácsony január 1-én van hazánkban.
c) 1939. április 11-én Magyarország kilép a Nemzetek Szövetségéből.
d) Nullánál nincs nagyobb egész szám.

Megoldás:
a) igaz
b) hamis
c) igaz (még akkor is, ha ennek utána kell járni)
d) hamis

10.3.2 Logikai műveletek

Negáció

1) Képezzük a következő kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását!
Esik az eső.

Megoldás:
a) Nem igaz, hogy esik az eső. (Nem esik az eső.)
b) Nem igaz, hogy nem esik az eső.

2) Képezzük a következő kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását!
1 kisebb, mint 2.

Megoldás:
a) Nem igaz, hogy 1 kisebb, mint 2. (1 nem kisebb, mint 2.)
b) Nem igaz, hogy 1 nem kisebb, mint 2.

3) Képezzük a következő kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását!
Ez a paralelogramma négyzet.

Megoldás:
a) Ez a paralelogramma nem négyzet.
b) Nem igaz, hogy ez a paralelogramma nem négyzet.

4) Képezzük a következő kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását!
3+2=5.

Megoldás:
a) 3+2 nem egyenlő 5-tel.
b') Nem igaz, hogy 3+2 nem egyenlő 5-tel.

5) Képezzük a következő kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását!
Ákos jó tanuló.

Megoldás:
a) Nem igaz, hogy Ákos jó tanuló. (Ákos nem jó tanuló.)
b) Nem igaz, hogy Ákos nem jó tanuló.

6) Képezzük az alábbi kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását! Ezeket fogalmazzuk meg többféleképpen is!

Az iskola minden tanulója szereti a matematikát.

Megoldás:
a) Nem igaz, hogy az iskola minden tanulója szereti a matematikát.
a) Az iskola nem minden tanulója szereti a matematikát.
a) Az iskolában van olyan tanuló, aki nem szereti a matematikát.
b) Nem igaz, hogy nem igaz, hogy az iskola minden tanulója szereti a matematikát.
b) Nem igaz, hogy az iskola nem minden tanulója szereti a matematikát.
b) Az iskolában nincs olyan tanuló, aki nem szereti a matematikát.

7) Képezzük az alábbi kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását! Ezeket fogalmazzuk meg többféleképpen is!
11 kisebb, mint 7.

Megoldás:
a) Nem igaz, hogy 11 kisebb, mint 7.
a) 11 nem kisebb, mint 7.
a) 7 nem nagyobb, mint 11.
b) Nem igaz, hogy nem igaz, hogy 11 kisebb, mint 7.
b) Nem igaz, hogy 11 nem kisebb, mint 7.
b) Nem igaz, hogy 7 nem nagyobb, mint 11.

8) Képezzük az alábbi kijelentés (a) egy- és (b) kétszeres tagadását! Ezeket fogalmazzuk meg többféleképpen is!
A 4 pozitív szám.
Megoldás:
a) A 4 nem pozitív szám.
b) Nem igaz, hogy nem igaz, hogy a 4 pozitív szám.

9) Határozzuk meg a p kijelentés négyszeres és ötszörös negációjának (⌉⌉⌉⌉p, ⌉⌉⌉⌉⌉p) logikai értékét! Általánosítsuk a feladatot!

Megoldás:
A kétszeres negáció szabálya alapján:
|⌉ ⌉ ⌉ ⌉ p|=|p|,
|⌉ ⌉ ⌉ ⌉ ⌉ p|=|⌉ p|.
Egy kijelentés páros számú negációjának logikai értéke megegyezik magának a kijelentésnek a logikai értékével. Egy kijelentés páratlan számú negációjának logikai értéke megegyezik a kijelentés negációjának a logikai értékével.

Konjunkció

11) Képezzük a kijelentések konjunkcióját és határozzuk meg a logikai értéküket! A megoldásnál a kijelentések logikai értékét a matematikai ismereteink alapján állapítsuk meg!

a) p := 7 osztója 14-nek
q := 100 nagyobb, mint 3

b) p := A négyzet síkidom.
q := A négyzet nem paralelogramma.

Megoldás:
a) konjunkciója: $p \wedge q$ = 7 osztója 14-nek és 100 nagyobb, mint 3.
logikai értéke: $|p|=i$, $|q|=i$, $|p \wedge q|=i$.
b) konjunkciója: A négyzet síkidom, bár nem paralelogramma.
logikai értéke: $|p|=i$, $|q|=h$, $|p \wedge q|=h$.

Diszjunkció

12) Igazoljuk, hogy a diszjunkció kommutatív, azaz
Bármely p,q,r kijelentésre: $|p \vee q| = |q \vee p|$!

Bizonyítás:
A diszjunkció kommutatív tulajdonságú, mert:

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|p \vee q\|$	$\|q \vee p\|$
i	i	i	i
i	h	i	i
h	i	i	i
h	h	h	h

13) Igazoljuk, hogy a diszjunkció asszociatív, azaz
Bármely p,q,r kijelentésre: $|(p \vee q) \vee r| = |p \vee (q \vee r)|$.

Bizonyítás:
A diszjunkció asszociatív tulajdonságú, mert:

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|r\|$	$\|(p \vee q) \vee r\|$	$\|p \vee (q \vee r)\|$
i	i	i	i	i
i	i	h	i	i
i	h	i	i	i
i	h	h	i	i
h	i	i	i	i
h	i	h	i	i
h	h	i	i	i
h	h	h	h	h

De Morgan-azonosság

14) Igazolja a De Morga-azonosságokat a diszjunkcióra és a konjunkcióra nézve! Logikai értéktáblázattal:

$|\neg (p \wedge q)| = |\neg p \vee \neg q|$

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|\neg (p$	$\wedge q)\|$	$\|\neg p$	$\vee$	$\neg q\|$
i	i	h	i	h	h	h
i	h	i	h	h	i	i
h	i	i	h	i	i	h
h	h	i	h	i	i	i
		2	1	1	2	1

Hasonlóképpen belátható, hogy bármely p,q kijelentésre

$|\neg (p \vee q)| = |\neg p \wedge \neg q|$.

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|\neg (p$	$\vee q)\|$	$\|\neg p$	$\wedge$	$\neg q\|$
i	i	h	i	h	h	h
i	h	h	i	h	h	i
h	i	h	i	i	h	h
h	h	i	h	i	i	i
		2	1	1	2	1

Implikáció

15) Bármely p kijelentésre : $|p \to p| \neq |p|$ (Az implikáció nem idempotens.)

Logikai értéktáblázattal könnyen igazolható az implikáció többi tulajdonsága is.

$\|p\|$	$\|p \to p\|$
i	i
h	i

Ekvivalencia

16) (a) Fogalmazzuk meg a következő kijelentéspár ekvivalenciáját többféleképpen is! (b) Határozzuk meg a logikai értékét!

p:= Az n egész szám 0-ra végződik.

q:= Az n egész szám páros.

Megoldás:

a)

- Ha az n egész szám 0-ra végződik, akkor az n egész szám páros, és ha az n egész szám páros, akkor az n egész szám 0-ra végződik.
- Az n egész szám akkor és csak akkor páros, ha az n egész szám 0-ra végződik.
- Ahhoz, hogy az n egész szám páros legyen szükséges és elégséges feltétel, hogy az n egész szám 0-ra végződjön.

b) $|p \leftrightarrow q| = h$, mert $|p \to q| = i$, de $|q \to p| = h$

10.3.3 Halmazelmélet

1)
(a) Definiálja a gyümölcsök halmazát egyes elemeinek felsorolásával!
(b) Írja ezt röviden, matematikai jelöléssel is!
(c) Adja meg a halmaz egy lehetséges alaphalmazát!
(d) Adja meg a halaz egy elemét!
(e) Adjon meg jelöléssel egy olyan elemet, ami nem tartozik a halmazba!

Megoldás:
a) G:={cseresznye, meggy, alma, körte, barack, dinnye, …}
b) G:={x|x gyümölcs}
c) U:= {növények}
d) eper$\in$H
e) kutya$\notin$H

2) Az alábbi halmazok közül melyik üres halmaz?
a) R:={x|x repülő fa},
b) H:={x|x házas agglegény},
c) F:={x|x magyarországi folyók 2000-ben}

Megoldás:
Két üres halmaz van: R=Ø, H=Ø

3) Melyik esetben neveztünk meg azonos halmazokat?
a) U:={természetes számok},
H:={100-nál kisebb páros természetes számok},
K:={0-nál nagyobb páratlan természetes számok}.
b) U:={magyarországi települések 2000-ben},
H:={magyarországi megyeszékhelyek 2000-ben},
K:={Salgótarján, Eger, Miskolc, Nyíregyháza, Debrecen, Budapest, Kecskemét, Szolnok, Szeged, Békéscsaba, Pécs, Szekszárd, Székesfehérvár, Tatabánya, Győr, Veszprém, Zalaegerszeg, Szombathely, Kaposvár}.

Megoldás:
Csak a b) feladat két halmaznak ugyanazok az elemei, tehát H=K.

4) Adott H:={0,5,10} és K:={0, 10} halmaz. Teljesülnek a két halmazra a következő állítások?
a) $H \subseteq K$
b) $K \subseteq H$
c) $H \subset K$
d) $K \subset H$
e) $K = H$

Megoldás:

$K \subseteq H$, mert a K halmaz minden eleme eleme a H halmaznak is. A H halmaznak a H halmaz elemein kívül van még más eleme is, ezért H valódi részhalmaza K-nak, azaz $H \subset K$. A többi állítás nem teljesül.

5) Adott H:={x|x húsz és 30 év közötti magyar állampolgár} és K:={x|x hallgatói jogviszonyban van egy hazai felsőoktatási intézményben} halmaz. Teljesülnek a két halmazra a következő állítások?

a) $H \subseteq K$
b) $K \subseteq H$
c) $H \subset K$
d) $K \subset H$
e) $K = H$

Megoldás:

A H halmaznak nem részhalmaza K, és a K halmaznak nem részhalmaza H. A két halmaz ebből következően nem is egyenlő, tehát egyik állítás sem igaz.

6) Adott H:={2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16…} és K:={x|x 0-nál nagyobb páros szám} halmaz. Teljesülnek a két halmazra a következő állítások?

a) $H \subseteq K$
b) $K \subseteq H$
c) $H \subset K$
d) $K \subset H$
e) $K = H$

Megoldás:

A két halmaz egyenlő, csak másképpen határoztuk meg azokat. Mivel $H = K$, így az a), b), e) állítás teljesül, míg a c), d) nem.

7) Állapítsuk meg, hogy a H és K halmazok közül részhalmaza-e egyik a másiknak!

a) H:={4,5}; K:={5,4},
b) H:={3,4,5}; K:={4,5,6}.

Megoldás:

a) $H \subseteq K$ és $K \subseteq H$ azaz H=K,
b) $H \not\subset K$ és $K \not\subset H$.

8) Legyen H:={-2, -1, 0, 1, 2} illetve K:={0, 2, 4,8,16} két halmaz. Határozza meg az alábbi halmazok elemeit!

a) $H \cup K$
b) $H \cap K$

Megoldás:

a) $H \cup K$= {-2, -1, 0, 1, 2, 4,8,16}.
b) $H \cap K$ = {0, 2}.

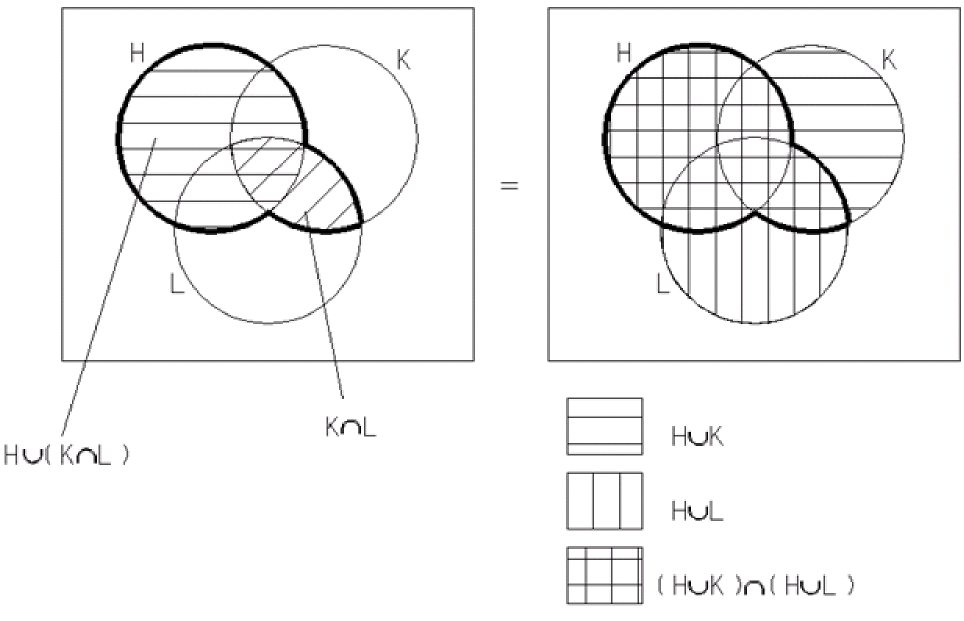
9) Legyenek H, K, L halmazok az U alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Bizonyítsa be az alábbi tételeket! (Ezek a tulajdonságok könnyen igazolhatók Venn-diagrammal.)

Tétel.

1. tétel: $H \cup H = H$ (idempotencia),
2. tétel: $H \cap H = H$ (idempotencia),
3. tétel: $H \cup K = K \cup H$ (kommutativitás),
4. tétel: $H \cap K = K \cap H$ (kommutativitás),
5. tétel: $(H \cup K) \cup L = H \cup (K \cup L)$ (asszociativitás),
6. tétel: $(H \cap K) \cap L = H \cap (K \cap L)$ (asszociativitás),
7. tétel: $H \cup (K \cap L) = (H \cup K) \cap (H \cup L)$ (disztributivitás).
8. tétel: $H \cap (K \cup L) = (H \cap K) \cup (H \cap L)$ (disztributivitás).

Bizonyítás:

A 7. tétel igazolását szemlélteti a 43. kép.



43. kép Az unió metszetre nézve disztributív tulajdonságának igazolása

A többi tulajdonság igazolását végezzük el önállóan!

10) Legyen $H := \{0, 1, 2\}$ és $K := \{0, 3, 6, 18\}$ halmaz. Milyen elemei vannak a $H \setminus K$ és a $K \setminus H$ halmaznak?

Megoldás:

$H \setminus K = \{1, 2\}$.

$K \setminus H = \{3, 6, 18\}$

11) Legyenek H, K halmazok az U alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Bizonyítsa be az alábbi tételeket!

Tétel.

1. tétel: $H \setminus H \neq H$ ($H \setminus H = \emptyset$) (nem idempotens)

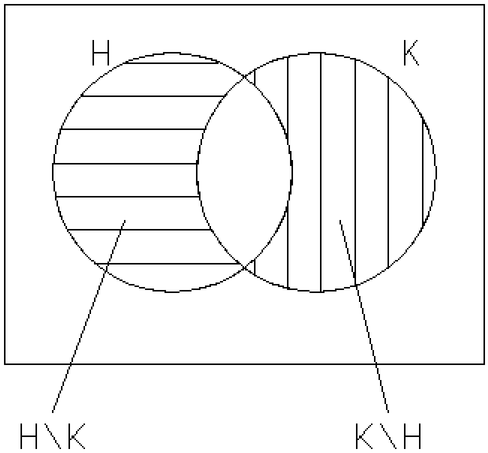
2. tétel: $H \setminus K \neq K \setminus H$ (nem kommutatív)

3. tétel: $(H \setminus K) \setminus L \neq H \setminus (K \setminus L)$ (nem asszociatív)

Bizonyítás:

A 2. tulajdonságot szemlélteti Venn-diagrammon a 44. kép.

$H \setminus K \neq K \setminus H$



44. kép A halmazok különbsége nem kommutatív

12) Legyen U:={1, 2, 3, 4, 5} és H:={1, 5}. Határozza meg a H halmaz komplementer halmazát az U alaphalmazon!

Megoldás:

Ekkor $\sim H = \{2, 3, 4\}$.

13) Legyenek H, K halmazok az U alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Bizonyítsa be az alábbi tételeket!

Tétel.

1. tétel: $\sim\sim H = H$

2. tétel: $\sim\emptyset = U$

3. tétel: $\sim U = \emptyset$

4. tétel: $U \setminus H = \sim H$

Bizonyítás:
Halmazok rajzolásával a tételek egyértelműen beláthatók.

14) Legyenek H, K halmazok az U alaphalmaz tetszőleges részhalmazai. Bizonyítsa be De Morgan azonosságokat!
Tétel.
1. tétel: $\sim(H \cup K) = \sim H \cap \sim K$,
2. tétel: $\sim(H \cap K) = \sim H \cup \sim K$.

Bizonyítás:
Venn-diagrammal belátható.

15) $U:=\{x|x \in N$ és $x \le 20\}$
$H:=\{x|x \in N$, 3 osztója x-nek és $x \le 20\}$
$K:=\{x|x \in N$,4 osztója x-nek és $x \le 20\}$
Képezzük a következő halmazokat!
a) $H \cup K$,
b) $H \cap K$,
c) H–
d) H\K,
e) K\H

Megoldás:
Írjuk fel az adott halmazok elemeit!
$U:=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
$H:=\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
$K:=\{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$
a) $H \cup K = \{0, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20\}$
b) $H \cap K = \{0,12\}$
c) $\sim H = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20\}$
d) $H \setminus K = \{3, 6, 9, 15, 18\}$
e) $K \setminus H = \{4, 8, 16, 20\}$

16) Milyen kapcsolat van H és K halmaz között, ha
a) $H \setminus K = \varnothing$ és $H \cap K = H$,
b) $H \setminus K = \varnothing$ és $H \cup K = H$,
c) $H \setminus K = \varnothing$ és $K \setminus H = \varnothing$.

Megoldás:
Venn-diagrammal megoldható.

17) Teljesül-e minden H, K halmazra, hogy $((H \setminus K) \cup (K \setminus H)) \subset (H \cup K)$?

Megoldás:
Venn-diagrammal megoldható.

18) A halmazműveletekre vonatkozó tulajdonságok alapján bizonyítsuk be, a következő állításokat, ahol H, K és L egy adott U alaphalmaza részhalmazai!

a) $H = (H \cap K) \cup (H \cap \sim K)$,
b) $H \cup K = (H \cap \sim K) \cup (H \cap K) \cup (\sim H \cap K)$,
c) $U = (H \cap \sim K) \cup K \cup (L \cap \sim H) \cup \sim L$

Megoldás:
Venn-diagrammal megoldható.

10.3.4 Kijelentéslogika

1) Formalizáljuk a következő kijelentést!
„Feltéve, hogy a szemtanú megbízható és az írásszakértő véleménye helytálló, a bűncselekményt akkor és csak akkor követték el előre megfontolt szándékkal, ha a talált ujjlenyomatok a tettestől vagy a tettestárstól származnak”.

Megoldás:
Formalizálás után: $(p \wedge q) \rightarrow (r \leftrightarrow (s \vee t))$

2) Írjuk fel a $((p \wedge]\, q) \rightarrow r) \leftrightarrow q$ formula összes interpretációját! Érvényes-e a formula?

|p|	|q|	|r|	((p ∧	]q)	→ r)	↔	q
i	i	i	h	h	i	i	i
i	i	h	h	h	i	i	i
i	h	i	i	i	i	h	h
i	h	h	i	i	h	i	h
h	i	i	h	h	i	i	i
h	i	h	h	h	i	i	i
h	h	i	h	i	i	h	h
h	h	h	h	i	i	h	h
			2	1	3	5	4

A formula nem érvényes, mert nem minden interpretációra igaz.

2) Igazolja, hogy az alábbi összefüggés tautológia: $(p \wedge]\, p) \rightarrow q$!

Megoldás:
A $(p \land \neg p) \to q$ formula azonosan igaz (tautológia vagy érvényes) mert:

interpretációk sorszáma	|p|	|q|	|(p ∧	¬p)	→	q|
1	i	i	h	h	i	i
2	i	h	h	h	i	h
3	h	i	h	i	i	i
4	h	h	h	i	i	h
			2	1	3	1

3) Bizonyítsa be a leválasztási szabályt (modus ponens)!
1. $p \to q$
2. p

———

3. q

A fenti leírás is rövidíthető az alábbi módon: $(p \to q) \land p \models q$.

Bizonyítás:
Elkészítve a logikai értéktáblázatot:

		premisszák		konklúzió
|p|	|q|	|p→q|	|p|	|q|
i	i	i	i	i
i	h	h	i	h
h	i	i	h	i
h	h	i	h	h

Láthatjuk, hogy minden olyan esetben amikor a premisszák ($p \to q$, p) egyszerre igazak, igaz a konklúzió (q) is. Tehát a szabályt igazoltuk.

4) Helyes-e az alábbi következtetés?

Ha nálam van a kulcs, akkor ki tudom nyitni az ajtót.
Nálam van a kulcs.

———

Ki tudom nyitni az ajtót.

Milyen kijelentésekből épül fel ez a következtetés?
p:= nálam van a kulcs
q:= ki tudom nyitni az ajtót.

Tehát a következtetés sémája: $(p \to q) \land p \models q$

$p \to q$
p

——

q

Ez a leválasztási szabály sémája, így ez a következtetés helyes.

5) Helyes-e az alábbi következtetés?

Ha álmodom, akkor alszom.
Álmodom.
———————————
Alszom.

Milyen kijelentésekből épül fel ez a következtetés?
p:= álmodom
q:= alszom.

Tehát a következtetés sémája: $(p \to q) \wedge p \models q$

$p \to q$
p
———
q

Ez a leválasztási szabály sémája, így ez a következtetés helyes.

6) Helyes-e az alábbi következtetés:

Ha a benzin elfogyott az autóból, akkor az autó megáll.
Az autó megáll.
———————————
Elfogyott a benzin az autóból.

Megoldás:
A következtetésben szereplő kijelentések a p és q egyszerű kijelentésekből épülnek fel:
p: = a benzin elfogyott az autóból
q: = az autó megáll
A következtetés szerkezete az alábbi sémával írható fel:
1. $p \to q$
2. q
———
3. p

Készítsük el a következő értéktáblázatot:

		premisszák		konklúzió
$\lvert p\rvert$	$\lvert q\rvert$	$\lvert p\to q\rvert$	$\lvert q\rvert$	$\lvert p\rvert$
i	i	i	i	i
i	h	h	h	i
h	i	i	i	h
h	h	i	h	h

A harmadik sorban olyan eset szerepel, amikor a premisszák ($p \to q$, illetve q) együttesen igazak, de a konklúzió (p) hamis. Elmondhatjuk, hogy a következtetés nem helyes.

7) Helyes-e az alábbi következtetés?

Ha a benzin elfogyott az autóból, akkor az autó megáll.
Nem fogyott el a benzin.

Az autó nem áll meg.

Megoldás:

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ \rceil q \end{array}}{\rceil p}$$

Formalizálva: $(p \to q) \wedge \rceil q \models \rceil p$
A következtetés helyes, mert ez az „Elvevő" szabály (modus tollens).

8) Helyes-e az alábbi következtetés?

Ha tartozom, akkor adós vagyok.
Nem tartozom.

Nem vagyok adós.

Megoldás:

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ \rceil q \end{array}}{\rceil p}$$

Formalizálva: $(p \to q) \wedge \rceil q \models \rceil p$
A következtetés helyes mert ez az „Elvevő" szabály (modus tollens).

9) Helyes-e az alábbi következtetés?

Ha egy hallgató vizsgázik, akkor felvette az adott tanegységet.
Ha felvette az adott tanegységet, akkor hallgatói jogviszonya van.

Ha egy hallgató vizsgázik, akkor hallgatói jogviszonya van.

Megoldás:

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \end{array}}{p \to r}$$

Formalizálva: $(p \to q) \wedge (q \to r) \models p \to r$
A következtetés helyes mert ez a láncszabály (feltételes szillogizmus).

Ellenőrizhető igazságtáblával is:

			premisszák		konklúzió
p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h
i	h	i	h	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	i
h	h	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i

10) Bizonyítsuk be az indirekt bizonyítást logikai értéktáblázattal!
Az indirekt bizonyítás sémája: $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge q \models p$

$$\frac{\begin{array}{l}\neg p \rightarrow \neg q \\ q\end{array}}{p}$$

p	q	$\neg p$	$\rightarrow$	$\neg q$
i	i	h	i	h
i	h	h	i	i
h	i	i	h	h
h	h	i	i	i
		1	2	1

Helyes a következtetés, mert minden olyan esetben, amikor mind a két premissza igaz, igaz a konklúzió is.

11) Helyes-e az alábbi következtetés?

a) Ha szeretem igazán, akkor összeházasodunk.
b) Nem szeretem igazán.

---

c) Nem házasodunk össze.

A következtetési szabály sémája: $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge q \models p$

$$\frac{\begin{array}{l}\neg p \rightarrow \neg q \\ q\end{array}}{p}$$

Ez az indirekt bizonyítás sémája, így a következtetés biztosan helyes.

12) Helyes-e az alábbi következtetés?
a) Ha a barátom, akkor moziba megyek vele.

---

b) Ha nem a barátom, akkor nem megyek vele moziba.

Megoldás:
Formalizálva:
p = a barátom
q = moziba megyek vele
A következtetés sémája:

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p}$$

A szabály jelekkel leírva: $p \rightarrow q \models \neg q \rightarrow \neg p$
Mivel ez a kontrapozíció („elvetési mód”) szabálya, ezért a következtetés helyes.
Saját magunk ellenőrzéseként igazolhatjuk logikai értéktáblázattal is:

				premissza	konklúzió
$\|p\|$	$\|q\|$	$\|\neg p\|$	$\|\neg q\|$	$\|p \rightarrow q\|$	$\|\neg q \rightarrow \neg p\|$
i	i	h	h	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	i	i	i

13) Bizonyítsuk be a diszjunktív szillogizmust logikai értéktáblázattal!
Diszjunktív szillogizmus sémája:

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q}$$

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|p \vee q\|$	$\|\neg p\|$
i	i	i	h
i	h	i	h
h	i	i	i
h	h	h	i

Tehát a következtetés helyes.

14) Döntsük el az alábbi következtetés helyességét!

A b szám osztható 2-vel vagy 3-mal.
A b szám nem osztható 2-vel.

A b szám osztható 3-mal.

Megoldás:
Formalizálva:
p = a b szám osztható 2-vel
q = a b szám osztható 3-mal
A következtetés sémája:

$p \vee q$
$\neg p$
——
q

A szabály jelekkel leírva: $(p \vee q) \wedge \neg p \models q$
Mivel ez a diszjunktív szillogizmus (modus tollendo ponens) szabály, így biztosan igaz.
Nézzük meg az ellenőrzés végett az igazolást logikai értéktáblázattal is:

			premisszák		konklúzió
$\|p\|$	$\|q\|$	$\|\neg p\|$	$\|p \vee q\|$	$\|\neg p\|$	$\|q\|$
i	i	h	i	h	i
i	h	h	i	h	h
h	i	i	i	i	i
h	h	i	h	i	h

15) Helyes-e az alábbi következtetés?
a) Ha a logika vizsgán jó tételt húzok, akkor jelesre vizsgázom.
b) Ha nem tanulom rendszeresen a logikát, akkor nem vizsgázom jelesre.

---

c) Ha nem tanulom rendszeresen a logikát, akkor nem húzok jó tételt a logika vizsgán.

p:= Jó tételt húzok a logika vizsgán.
q:= Jelesre vizsgázom logikából.
r:= Rendszeresen tanulom a logikát.

A következtetés sémája:

$p \to q$
$\neg r \to \neg q$
——
$\neg r \to \neg p$

A következtetés igazságtáblázata:

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|r\|$	$\|p \to q\|$	$\|\neg r$	$\to$	$\neg q\|$	$\|\neg r$	$\to$	$\neg p\|$
i	i	i	i	h	i	h	h	i	h
i	i	h	i	i	h	h	i	h	h
i	h	i	h	h	i	i	h	i	h
i	h	h	h	i	i	i	i	h	h
h	i	i	i	h	i	h	h	i	i
h	i	h	i	i	h	h	i	h	i
h	h	i	i	h	i	i	h	i	i
h	h	h	i	i	i	i	i	i	i
			1	1	2	1	1	2	1

A következtetés helyes.

16) Helyes az alábbi következtetés?
a) Ha 12 osztható 3-mal, akkor 12 összetett szám.
b) 12 osztható 3-mal.

---

c) 12 összetett szám.

Megoldás:
Két kijelentésből épül fel ez a következtetés:
p:= 12 osztható3-mal.
q:= 12 összetett szám.

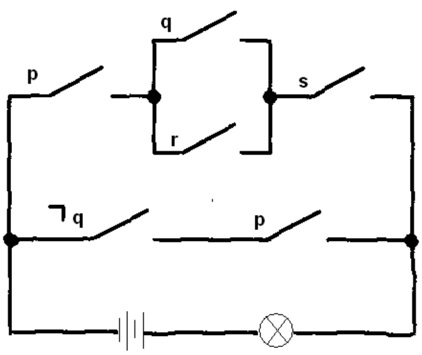
Tehát a következtetés sémája: $(p \rightarrow q) \wedge p \models q$

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Ez a leválasztási szabály (modus ponens), tehát a következtetés helyes.

10.3.5 A kijelentéslogika alkalmazásai

1) Írjuk fel annak feltételét, hogy a következő ábrákon látható áramkörökben áram folyjon! (A]q jelű kapcsoló a q jelűvel éppen ellentétes működésű; két azonos jelű kapcsoló egyszerre van nyitva, ill. zárva).



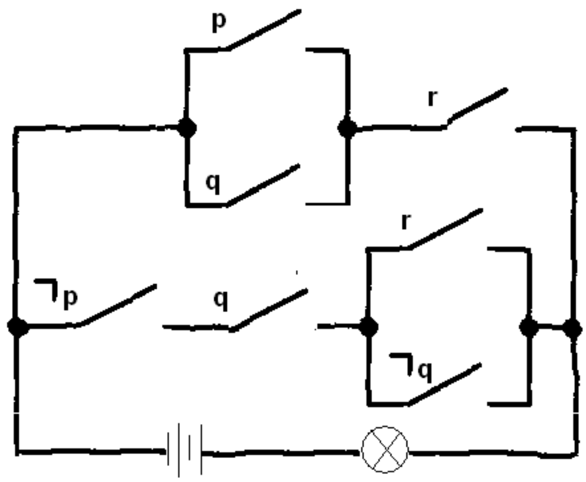
45. kép Az 1. feladat logikai áramköre

Megoldás:

Használjuk fel a leckében elmondottakat, amit röviden így tehet összefoglalni: a soros kapcsolás a konjunkciónak, a párhuzamos kapcsolás a diszjunkciónak felel meg. Ennek alapján a működési feltételt a következő formula írja le:

$(p \wedge (q \vee r) \wedge s) \vee (\rceil q \wedge p)$.

2) Írjuk fel annak feltételét, hogy a következő ábrákon látható áramkörökben áram folyjon! (A $\rceil p$, $\rceil q$ jelű kapcsoló a p, illetve q jelűvel éppen ellentétes működésű; két azonos jelű kapcsoló egyszerre van nyitva, ill. zárva).



46. kép A 2. feladat logikai áramköre

Megoldás:

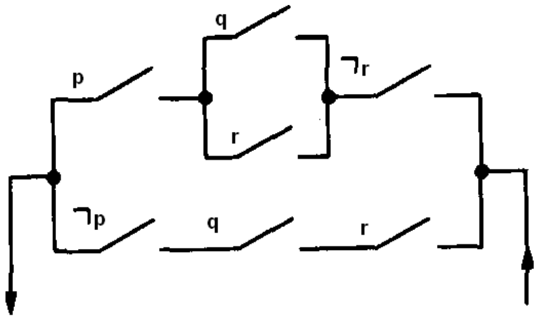
Az 1) feladat megoldásához hasonlóan járhatunk el; eredményül a következő formulát kapjuk: $((p \vee q) \wedge r) \vee (\rceil p \wedge q \wedge (r \vee \rceil q))$.

3) Tervezzünk olyan áramkört, amelyek a következő formulának felel meg:

$(p \wedge (q \vee r) \wedge \rceil r) \vee ((\rceil p \wedge q \wedge r)$!

Megoldás:

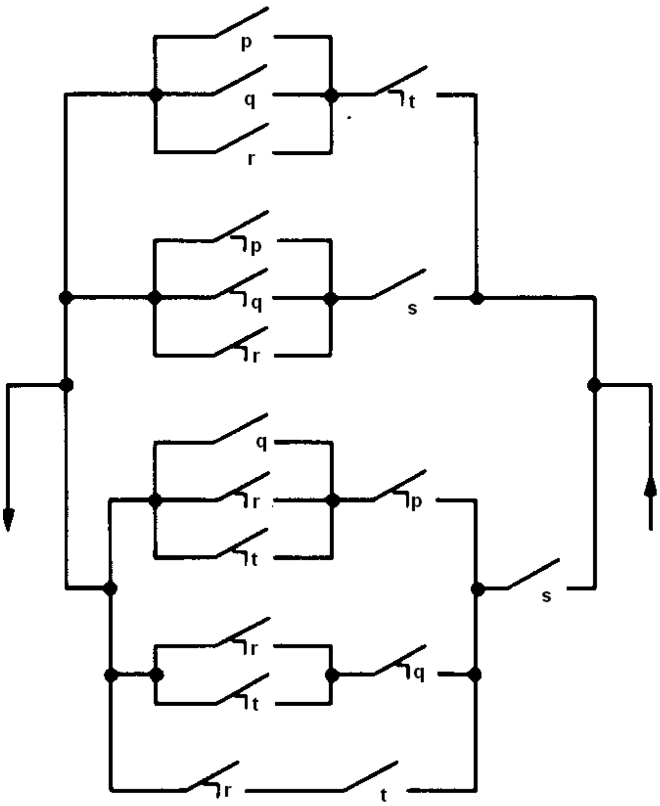
Azt az elvet követve, hogy a konjunkciónak a soros kapcsolás, diszjunkciónak a párhuzamos kapcsolás felel meg, megkonstruálhatjuk a kívánt áramkört. (Az egyszerűsítés kedvéért a 47. képen már nem rajzoltuk be az áramforrást és a fogyasztót).



47. kép A 3. feladat megoldása

4) Tervezzünk olyan áramkört, amelyek a következő formulának felel meg:
((p ∨ q ∨ r) ∧ ⌉t) ∨ ((⌉p ∨ ⌉q ∨ ⌉r) ∧ s) ∨
∨ (((q ∨ ⌉r ∨ ⌉t) ∧ ⌉p) ∨ ((⌉r ∨ ⌉t) ∧ ⌉q) ∨ (⌉r ∧ t))) ∧ s!

Megoldás:
A 48. képen összetettebb lesz a kapott áramkör.



48. kép A 4. feladat megoldása

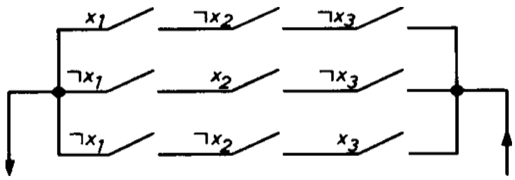
5) Egy hálókocsiban három fekvőhely van, mindhárom fekvőhelyhez egy-egy kapcsoló tartozik. A fülkében egy kis és egy nagy lámpa van. A nagy lámpa akkor ég, ha a többség akarja, a kis lámpa, pedig akkor, ha csak egy utas kapcsolja fel.

Tervezzük meg az áramkört!

Megoldás:

Jelölje x1, x2 és x3 a három kapcsolót, és írjuk fel annak a feltételét, hogy a kis lámpa égjen. A jelölésre itt is alkalmazzuk eddigi megállapodásainkat: ennek alapján a kis lámpa akkor és csak akkor ég, ha $(x_1 \wedge \rceil x_2 \wedge \rceil x_3) \vee (\rceil x_1 \wedge x_2 \wedge \rceil x_3) \vee (\rceil x_1 \wedge \rceil x_2 \wedge x_3)$

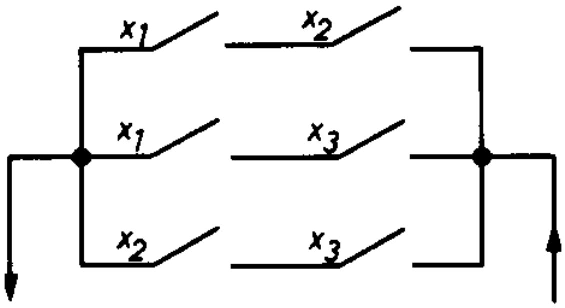
A kapott formulának megfelelő áramkört már könnyen lerajzolhatjuk, amiben a 49. kép is segít.



49. kép Az 5. feladat megoldásának első része

Hasonló módon felírhatjuk annak a feltételét, hogy a nagy lámpa égjen.

Ez a feltétel még egyszerűbb is lesz, hiszen nem szükséges például vizsgálnunk, hogy ha x_1 és x_2 bekapcsolt állapotban van, akkor milyen helyzetben van az x_3 jelű kapcsoló.



50. kép Az 5. feladat megoldásának második része

10.3.6 A prédikátumlogika elemei

Logikai érték

1) Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét!

a) Van olyan növény, amelyik kétszikű. (Alaphalmaz := növények halmaza)

b) Minden ember kékszemű. (Alaphalmaz := Magyarországon élő emberek)

c) Van olyan trapéz, amelyik nem paralelogramma.

d) Az élőlények élete korlátozott.

Megoldás:
Az a), c), d) kijelentések logikai értéke igaz, a b) kijelentés logikai értéke hamis.

Tagadás

2) Képezzük a következő kijelentések tagadását!
a) Van olyan növény, amelyik kétszikű. (Alaphalmaz := növények halmaza)
b) Minden ember kékszemű. (Alaphalmaz := Magyarországon élő emberek).
c) Van olyan trapéz, amelyik nem paralelogramma.
d) Az élőlények élete korlátozott. (Alaphalmaz := élőlények halmaza).

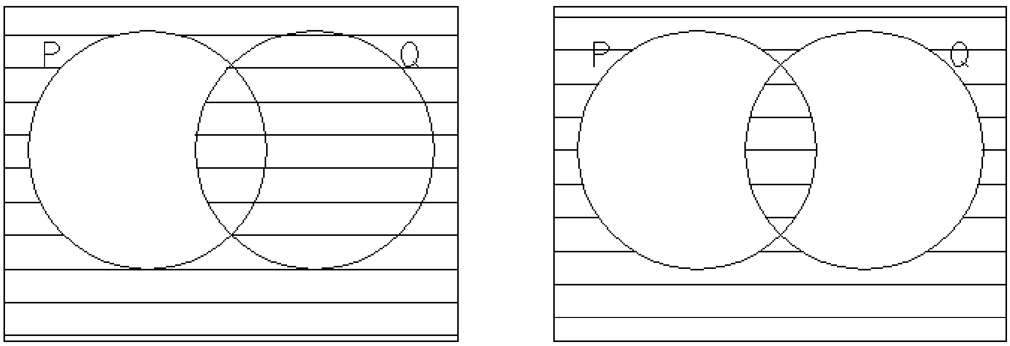
Megoldás:
a) Minden növény nem kétszikű. (Nincs kétszikű növény.)
b) Van olyan ember, aki nem kékszemű.
c) Minden trapéz paralelogramma.
d) Van olyan élőlény, amelyiknek az élete nem korlátozott.

10.3.7 Predikátumlogikai következtetések

Műveletek prédikátumokkal

1) Szemléltessük Venn-diagrammal a Px → Qx és a Px ↔ Qx igazsághalmazát, ha Px illetve Qx igazsághalmaza P, illetve Q!

Megoldás:



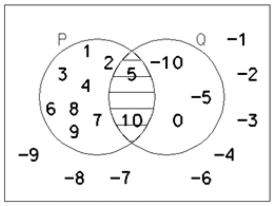
51. kép Px → Qx és a Px ↔ Qx igazsághalmazának ábrázolása

2) Tekintsük az U := {-10, -9, …, -1, 0, 1, 2, …, 9, 10} alaphalmazon értelmezett Px := „x pozitív szám” és Qx := „5 osztója x-nek” predikátumokat. Szemléltessük Venn-diagramon a következő predikátumok igazsághalmazát!
a) Px ∧ Qx,
b) Px ∨ Qx,

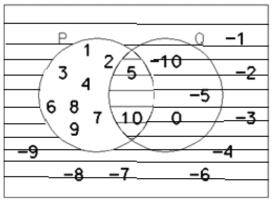
c) Px → Qx,
d) Px ↔ Qx.

Megoldás:
Az ábra az a), c) és d) eseteket mutatja. (A b) esetet rajzoljuk meg önállóan!)

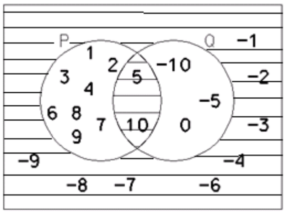
52. kép Az a) eset megoldása: Px ∧ Qx igazsághalmaza: $P \cap Q = \{5, 10\}$



53. kép A c) eset megoldása: Px → Qx igazsághalmaza P \ Q .
P \ Q = { 10, 5, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10}



54. kép Az d) eset megoldása: Px ↔ Qx igazsághalmaza:
P \ Q ∪Q \ P= {10, 5, -1, -2, -3, -4, -6, -7, -8, -9}



Következtetés

3) Helyes-e a következő következtetés?
1. A paralelogramma szemben fekvő oldalai párhuzamosak.
2. A rombusz szemben fekvő oldalai párhuzamosak.

---

3. A rombusz paralelogramma.

Megoldás:
Legyen a tárgyalás alaphalmaza a síkbeli négyszögek halmaza.
Px := x paralelogramma.
Qx := x szemben fekvő oldalai párhuzamosak.

Rx := x rombusz.

Ezekkel a predikátumokkal a következő módon fogalmazhatnánk meg a következtetésben szereplő kijelentést.

1. Minden x-re igaz, hogy (ha Px, akkor Qx).
2. Minden x-re igaz, hogy (ha Rx, akkor Qx).

---

3. Minden x-re igaz, hogy (ha Rx, akkor Px).

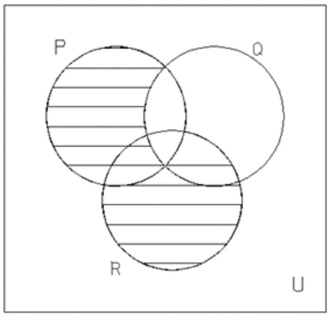
Rövidebben:

1. $\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$
2. $\forall x\ (Rx \rightarrow Qx)$

---

3. $\forall x\ (Rx \rightarrow Px)$

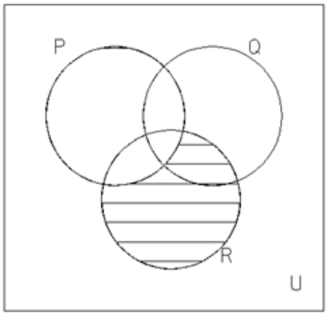
55. kép Az 1. és 2. kijelentések közös Venn-diagramja



(ahol Px, Qx és Rx predikátumok igazsághalmaza rendre P, Q, R):

1) $P \setminus Q = \emptyset$
2) $R \setminus Q = \emptyset$

56. kép A konklúzió (3.) Venn-diagramja: $R \setminus P = \emptyset$.



A következtetés nem helyes, mert a premisszák közös Venn-diagramja nem tartalmazza részként a konklúzió Venn-diagramját. Vigyázzunk, ez nem azt jelenti, hogy a konklúzió hamis, hanem azt, hogy az előbbi két premisszából az nem következik.

4) Helyes-e a következtetés?

a) A 4-gyel osztható számok párosak.
b) A 2-re végződő számok párosak.

---

c) A 2-re végződő számok oszthatók 4-gyel.

Megoldás:
U := {egész számok}.
Px := x osztható 4-gyel.
Qx := x páros szám.
Rx := x szám 2-re végződik.

Predikátumok felhasználásával a következtetés szerkezete:

a) $\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$
b) $\forall x\ (Rx \rightarrow Qx)$

---

c) $\forall x\ (Rx \rightarrow Px)$

A feladat megoldása nélkül megállapítható, hogy a következtetés nem helyes. Nem azért, mert a konklúzió hamis, hanem azért, mert az előző következtetési feladattal azonos szerkezetű. (Az előző feladatban a konklúzió igaz volt, ebben a feladatban hamis, a következtetés mind a két esetben helytelen.)

5) Helyes-e a következtetés?

a) Aki kíváncsi, hamar megöregszik.
b) Van kíváncsi állat.

---

c) Van hamar öregedő állat.

Megoldás:
U := {élőlények},
Kx := x kíváncsi,
Ax := x állat,
Px := x hamar öregedő.

Ezekkel a predikátumokkal a következtetés kijelentései a következőképpen fogalmazhatóak meg:

a) Minden x-re igaz, hogy (ha Kx, akkor Px).
b) Van olyan x, hogy (Kx és Ax).

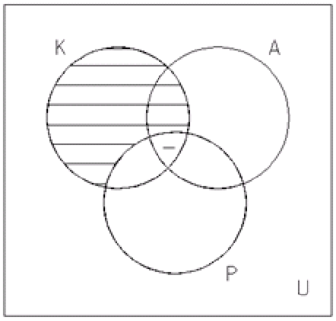
---

c) Van olyan x, hogy (Ax és Px).

a) $\forall x\ (Kx \rightarrow Px)$
b) $\exists x\ (Kx \land Ax)$

---

c) $\exists x\ (Ax \land Px)$.



57. kép Az 5-ös feladat megoldása Venn-diagramon ábrázolva.

Legyen Kx, Ax és Px predikátumok igazsághalmaza rendre K, A és P

a) $K \setminus P = \emptyset$
b) $K \cap A \neq \emptyset$
c) $A \cap P \neq \emptyset$

Az a) és b) premissza közös Venn-diagramja tartalmazza a konklúzió diagramját, tehát helyes a következtetés.

6) Képezzük a következő „minden x-re Px”, illetve „van olyan x, amelyre Px” típusú kijelentések tagadását!

a) Minden bogár ízeltlábú.
b) Van olyan bogár, amelyik nem rovar.
c) Van kíváncsi állat.
d) Minden négyzet téglalap.

Megoldás:

a) Nem igaz, hogy minden bogár ízeltlábú. (Van olyan bogár amelyik nem ízeltlábú.)
b) Nem igaz az, hogy van olyan bogár, amelyik nem rovar. (Minden bogár rovar.)
c) Nem igaz, hogy van kíváncsi állat. (Minden állat nem kíváncsi. Nincs kíváncsi állat.)
d) Nem igaz, hogy minden négyzet téglalap. (Van olyan négyzet, amelyik nem téglalap.)

7) Helyes-e a következtetés? U:={állatok}

a) Minden rovar ízeltlábú.
b) Nincs olyan bogár, amelyik nem rovar.

---

c) Minden bogár ízeltlábú.

Megoldás:

Rx:=x rovar.
Bx:= x bogár.
Jx:= x ízeltlábú.

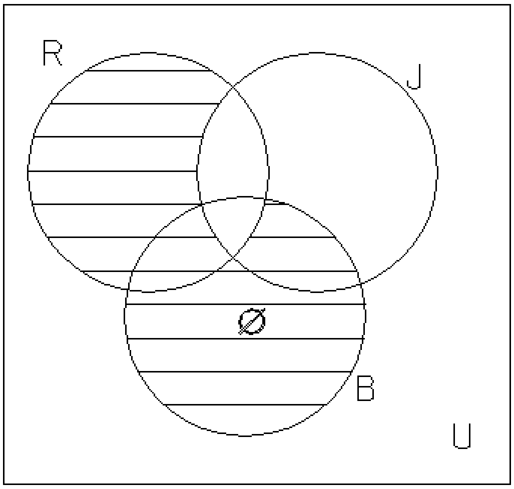
A következtetés predikátumlogikai szerkezete:

a) $\forall x(Rx \rightarrow Jx)$
b) $\rceil(\exists x(Bx \wedge \rceil Rx)$ vagy $\forall(Bx \rightarrow Rx)$

---

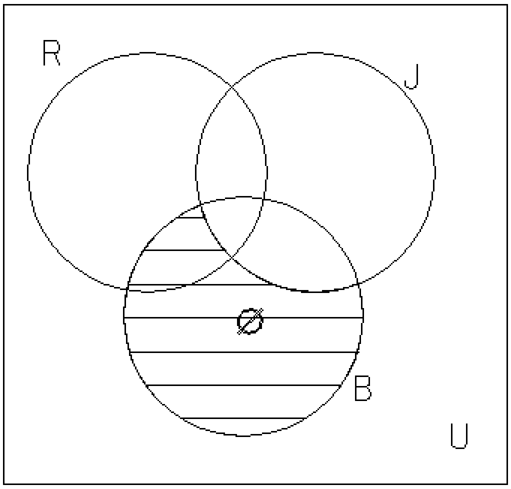
c) $\forall x(Bx \rightarrow Jx)$

A premisszák közös Venn-diagramja (58. kép).



58. kép A premisszák közös Venn-diagramja

A konklúzió Venn-diagramja (59. kép).



59. kép A konklúzió Venn-diagramja

(Rx, Bx, illetve Jx prédikátumok igazsághalmaza rendre R, B, illetve J)

A következtetés helyes, mert a premisszák közös Venn-diagramja részként tartalmazza a konklúzió Venn-diagramját.

10.4 ÖSSZEFOGLALÁS

A tananyagban szereplő feladatok ellenőrzését végezhette el a lecke alapján. Ha egy feladat megoldása nehézséget okozott az elmélet elsajátítása után, akkor itt a megoldási lépéseket részletesen megtekinthette. Ezzel lehetővé válik a későbbiekben a hasonló feladatok önálló megoldása. Az első néhány elméleti leckéhez itt nem található feladat.

11. GYAKORLÓ FELADATOK ÉS MEGOLDÁSAIK

11.1 CÉLKITŰZÉS

A tananyagban szereplő példákon és feladatok megoldásán keresztül képessé kellett válnia az önálló feladatmegoldásra. A lecke az elmélet elsajátítása és a leckékben található feladatok megoldása utáni gyakorlást támogatja, célja a tanult gyakorlati ismeretek általános, összefoglaló jellegű ellenőrzése, elmélyítése.

11.2 TARTALOM

Kijelentéslogika
Predikátumlogika
Kijelentéslogikai feladatok megoldásai
Predikátumlogikai feladatok megoldásai

11.3 A TANANYAG KIFEJTÉSE

11.3.1 Kijelentéslogika

1) Az alábbi kijelentések közül melyek tagadása az „Ákos nehezebb Zsuzsánál” kijelentésnek?

a) Zsuzsa nehezebb Ákosnál.
b) Ákos nem nehezebb Zsuzsánál.
c) Ákos könnyebb Zsuzsánál.
d) Zsuzsa legfeljebb olyan nehéz, mint Ákos.

2) Tekintsük a következő két kijelentést:

p:= Ákos megtanulta a leckéjét.
q:= Ákos színházba ment.

Fogalmazzuk meg az alábbi összetett kijelentéseket:

a) $p \wedge q$.
b) ha p, akkor q.
c) p, ezért q.
d) p vagy q.
e) q, mert p.

Az értékelési alapelv szerint döntsük el, hogy melyek azok amelyek logikai művelettel keletkeztek.

3) Írjuk fel logikai műveleti jelek segítségével a következőket:

a) Nem p, pedig q.
b) p, de nem q.
c) Ha p, akkor szükségképpen q.
d) p maga után vonja q-t.
e) Ha p, akkor q és ha nem p, akkor nem q.
f) q szükséges feltétele p-nek.

4) Melyik kijelentés az alábbi tagadása:
„Ha megtanultam a leckémet, akkor színházba megyek”?

a) Ha megtanultam a leckémet, akkor nem megyek színházba.
b) Megtanultam a leckémet és mégsem megyek színházba.
c) Ha nem tanultam meg a leckémet, akkor nem megyek színházba.
d) Nem tanultam meg a leckémet és nem megyek színházba

Formalizáljuk a választott kijelentést és értéktáblázattal győződjünk meg arról, hogy helyesen választottunk.

5) Legyen |p|=i, |q|=h, |r|=h, |s|=i.
Állapítsuk meg a következő formulával leírt összetett kijelentések logikai értékét:

a) $r \rightarrow (s \wedge p)$,
b) $p \rightarrow (r \wedge s)$,
c) $(p \wedge r) \leftrightarrow (r \wedge \rceil s)$,
d) $p \rightarrow (r \rightarrow s)$.

6) Műveleti tulajdonságok felhasználásával hozzuk egyszerűbb alakra a következő formulákat:

a) $(p \wedge q) \vee \rceil q$,
b) $\rceil (p \rightarrow q) \wedge q$,
c) $(p \wedge q \wedge r) \vee \rceil q \vee \rceil r$

7) Ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal. Az alábbi kijelentések közül melyik fejezi ki ugyanazt?

a) Ha egy szám nem osztható 6-tal, akkor nem osztható 3-mal sem.
b) Ha egy szám nem osztható 3-mal, akkor nem osztható 6-tal sem.
c) Az nem lehet, hogy egy szám osztható 6-tal, de nem osztható 3-mal.
d) A 3-mal való oszthatóság szükséges és elégséges feltétele a szám 6-tal való oszthatóságának.
e) A 6-tal való oszthatóság szükséges de nem elégséges feltétele annak, hogy a szám osztható 3-mal.
f) A szám 6-tal való oszthatóságának szükséges de nem elégséges feltétele az, hogy a szám osztható 3-mal.

8) Az első mondat igaz voltából következik-e, hogy a második mondat is igaz?

a) Ha Béla a gyilkos, akkor tudja a gyilkosság pontos idejét és helyét.
b) Ha Béla nem tudja a gyilkosság pontos idejét vagy nem tudja a gyilkosság helyét, akkor nem ő a gyilkos.

Írjuk fel mind a két mondat formuláját!

9) Mi a megfordítása a következő kijelentéseknek? Ha a kijelentés és megfordításának logikai értéke azonos, akkor fogalmazzuk meg ekvivalencia formájában is!

a) Ha egy szám 0-ra végződik, akkor páros.
b) Ha egy háromszög hegyesszögű, akkor egyenlő oldalú.
c) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.
d) Ha egy szám osztható 2-vel és 3-mal, akkor 6-tal is.

e) Egy szorzat akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője 0.

10) A következő kijelentés egy konkrét egész számra vonatkozik:
„Ha egy szám osztható 9-cel, akkor osztható 3-mal is.”

a) Igaz-e bármely egész számra ez a kijelentés?
b) Mi a kijelentés megfordítása? Igaz-e tetszőleges egész számra?
c) Mi az eredeti kijelentés kontrapozíciója? Igaz-e tetszőleges egész számra?
d) Fogalmazzuk át az eredeti kijelentést

1. „csak akkor”
2. „szükséges feltétel”
3. „elégséges feltétel” – kifejezések segítségével!

11) Írjuk fel a következő kijelentések formuláját!

a) Ha Ákos berúgja a tizenegyest, akkor megnyerjük a mérkőzést, de ha nem rúgja be, akkor nem nyerjük meg, viszont ha nem nyerjük meg, akkor kiesünk és vissza kell fizetni a szponzor támogatását.

b) Ha holnap süt a Nap vagy nem esik az eső, és nem fúj a szél, elmegyek kirándulni.

12) Készítsük el a következő formulák logikai értéktáblázatát!

a) $p \rightarrow \rceil(q \wedge r)$,
b) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\rceil p \vee q)$,
c) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$.

13) Érvényesek-e a következő formulák?

a) $(p \wedge q) \rightarrow \rceil(p \rightarrow \rceil q)$,
b) $p \rightarrow \rceil(q \wedge r)$,
c) $(p \vee q) \leftrightarrow (\rceil p \rightarrow q)$.

14) Igazoljuk logikai értéktáblázattal a következő egyenlőségeket!

a) $|\rceil(p \rightarrow q)|=|p \wedge \rceil q|$,
b) $|p \leftrightarrow q|=|(p \wedge q) \vee (\rceil p \wedge \rceil q)|$.

15) Műveleti tulajdonságok felhasználásával igazoljuk az előző feladatban szereplő egyenlőségeket!

16) Műveleti tulajdonságok felhasználásával igazoljuk az alábbi azonosságokat!

a) $|p \vee \rceil(p \rightarrow q)|=|p|$,
b) $|q \rightarrow (p \wedge q)|=|q \rightarrow p|$,
c) $|\rceil p \vee (p \wedge q)|=|p \rightarrow q|$,
d) $|p \rightarrow (p \vee q)|=i$.

20) Helyes-e a következtetés?

a) Ha éveim száma osztható 6-tal, akkor páros szám.
b) Éveim száma páros szám.

---

c) Éveim száma osztható 6-tal.

21) Helyes-e a következtetés?

a) Ha süt a Nap, akkor kirándulni megyek.
b) Nem süt a Nap.

---

c) Nem megyek kirándulni.

22) Helyesek-e az alábbi következtetési sémák?

a) $r \rightarrow (p \vee q)$
$r \wedge q$

$r \rightarrow p$

b) $\rceil p \rightarrow q$
$\rceil p \rightarrow \rceil q$

---

p

23) Formalizáljuk a következtetést és vizsgáljuk meg a helyességet!

a) Ha nem vagyok figyelmetlen, akkor jól oldom meg a feladatokat.
b) Ha jól oldom meg a feladatokat, akkor boldog vagyok.

---

c) Ha nem vagyok figyelmetlen, akkor boldog vagyok.

24) Helyesek-e az alábbi következtetések?

1. a) Ha jók az előadások, akkor érdemes felvenni a tárgyat.
b) Könnyen ad jelest az előadó vagy nem érdemes felvenni a tár-gyat.
c) Nem ad könnyen jelest az előadó.

---

d) Nem érdemes felvenni a tárgyat.

2. a) Ha az órám jól jár, akkor megérkezem az előadás kezdete előtt, ha idejében jön az autóbusz.
b) Idejében jön az autóbusz, mégsem érkezem meg az előadás kezdete előtt.

---

c) Nem jól jár az órám.

3. a) Az apám csak akkor jutalmaz meg, ha büszke lehetek magamra.
b) Jól sportolok vagy nem lehetek büszke magamra.
c) Ha rendszeresen tanulok, akkor nem sportolok jól.

---

d) Ha az apám megjutalmaz, akkor nem tanulok rendszeresen.

11.3.2 Predikátumlogika

25) Formalizáljuk a következő kijelentéseket:

a) Minden bogár rovar.
b) Van olyan páros szám, amelyik nem osztható 4-gyel.
c) Van olyan vállalkozó, aki nem milliomos.
d) Nem mind arany, ami fénylik.

26) Fogalmazzuk meg (többféleképpen is) a következő állítások tagadását!

a) A város minden üzlete jövedelmező.
b) Van páros prímszám.
c) Nem igaz, hogy nem létezik prímszám.
d) Minden állat kíváncsi.
e) Nincs olyan bogár, amelyik nem rovar.

27) Válasszuk ki – ha lehet – az alábbi kijelentések közül azokat, amelyek a következő kijelentés tagadását fejezi ki: „Van olyan főiskolai hallgató, aki nem kedveli a logikát és a számítástechnikát."

a) Minden főiskolai hallgató kedveli a logikát és a számítás-tech-ni-kát.
b) Senki sem kedveli a logikát és a számítástechnikát.
c) Nem létezik olyan főiskolai hallgató, aki nem kedveli a számítás-tech-nikát vagy nem kedveli a logikát.
d) Nincs olyan főiskolai hallgató, aki kedveli a logikát és a számítás-tech-nikát.

28) $U:=\{x|x \in N \text{ és } x<8\}$, $Px:=x$ osztható 3-mal, $Qx:=x$ osztható 5-tel. Szemléltessük az alábbi nyitott mondatok igazsághalmazát, ha Px, illetve Qx igazsághalmaza P, illetve Q.

a) $Px \rightarrow Qx$,
b) $Px \rightarrow \rceil Qx$,
c) $Qx \rightarrow \rceil Px$,
d) $Qx \wedge \rceil Px$,
e) $\rceil Px \wedge \rceil Qx$.

29) Szemléltessük Venn-diagrammal a következő kijelentéseket!

a) $\rceil \exists x(Px \wedge \rceil Qx)$,
b) $\exists x(Px \wedge Qx \wedge \rceil Rx)$,
c) $\rceil \forall x(Px \vee Qx)$,
d) $\exists x(\rceil Px \wedge (Qx \vee Rx)$.

30) Vizsgáljuk meg a predikátumlogika eszközeivel, hogy helyes-e a kö-vet-kez-tetés!

a) Egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha a szem-ben fekvő oldalai párhuzamosak.
b) A rombusz szemben fekvő oldalai párhuzamosak.

---

c) A rombusz paralelogramma.

31) Helyes-e a következtetés?

a) Némely rombusz négyzet.

---

b) Némely négyzet nem rombusz.

32) Vizsgáljuk meg (predikátumlogika eszközeivel) a következtetést!

a) Van olyan páros szám, amelyik nem osztható 4-gyel.

---

b) Van olyan 4-gyel osztható egész szám, amelyik páros.

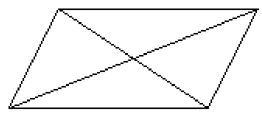
33) Helyes-e (predikátumlogikailag) a következtetés?

a) A paralelogramma átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a paralelogramma rombusz.

b) A (60. képen látható) paralelogramma átlói nem merőlegesek egymásra.

---

c) A (60. képen látható) paralelogramma nem rombusz.



60. kép A paralelogramma és a két átlója

34) Vizsgáljuk meg az alábbi következtetés helyességét!

a) Minden ember halandó.

b) Arisztotelész ember.

---

c) Arisztotelész halandó.

35) Formalizáljuk az alábbi következtetést és igazoljuk helyességét!

a) Nincs olyan tanár, aki milliomos.

b) Van olyan milliomos, aki vállalkozó.

---

c) Van olyan vállalkozó, aki nem tanár.

11.3.3 Kijelentéslogikai feladatok megoldásai

1) b) Nem igaz, hogy „Ákos nehezebb Zsuzsánál vagy Ákos nem nehezebb Zsuzsánál”.

2) a) Ákos megtanulta a leckéjét és színházba ment.

b) Ha Ákos megtanulta a leckéjét, akkor színházba ment.

c) Ákos megtanulta a leckéjét, ezért színházba ment.

A d), és e), összetett kijelentést fogalmazzuk meg ezekhez hasonlóan. Az értékelési alapelv szerint a), b), d) kijelentések logikai művelettel keletkeztek a p és a q kijelentésekből, mint komponensekből.

3) a) $\rceil p \wedge q$,
b) $p \wedge \rceil q$,
c) $p \rightarrow q$,
d) $p \rightarrow q$,
e) $(p \rightarrow q) \wedge (\rceil p \rightarrow \rceil q)$,
f) $p \rightarrow q$.

4) b) Megtanultam a leckémet és mégsem megyek színházba.
p:= Megtanultam a leckémet.
q:= Színházba megyek.
Az eredeti kijelentés formulája: $p \rightarrow q$
Tagadásának formulája: $p \wedge \rceil q$

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|p \rightarrow q\|$	$\|\rceil$	$(p \rightarrow q)\|$	$\|p \wedge$	$\rceil q\|$
i	i	i	h	i	h	h
i	h	h	i	h	i	i
h	i	i	h	i	h	h
h	h	i	h	i	h	i
		1	2	1	2	1

Valóban, $|\rceil (p \rightarrow q)| = |p \wedge \rceil q|$

5) a) $r \rightarrow (s \wedge p)$
Ha $|r|=h$, $|s|=|p|=i$, akkor $|r \rightarrow (s \wedge p)| = i$.
b) h
c) i
d) i

6)
a) $|(p \wedge q) \vee \rceil q| = |(p \vee \rceil q) \wedge (q \vee \rceil q)| = |p \vee \rceil q|$,
mert $|q \vee \rceil q| = i$,

b) $|\rceil (p \rightarrow q) \wedge q| = |\rceil (\rceil p \vee \rceil q) \wedge q)| = |(p \wedge \rceil q) \wedge q| = h$,
tehát a kifejezés azonosan hamis.
c) $|(p \wedge q \wedge r) \vee \rceil q \vee \rceil r| = |(p \vee \rceil q) \wedge (q \vee \rceil q) \wedge (r \vee \rceil q) \vee \rceil r| =$
$= \ldots = |p \vee \rceil q \vee \rceil r|$.

7) b), c), f).

8) p:= Béla a gyilkos.
q:= Béla tudja a gyilkosság pontos idejét.
r:= Béla tudja a gyilkosság helyét.

Az első mondat szerkezete: $p \rightarrow (q \wedge r)$,

míg a második mondaté: $(\rceil q \vee \rceil r) \rightarrow \rceil p$. $|(\rceil q \vee \rceil r) \rightarrow \rceil p| = |\rceil(q \wedge r) \rightarrow \rceil p| = |p \rightarrow (q \wedge r)|$. Tehát a két állítás logikailag azonos.

($|\rceil(q \wedge r) \rightarrow \rceil p| = |p \rightarrow (q \wedge r)|$, mert az implikáció logikai értéke egyenlő a kontrapozíciójának a logikai értékével).

9) a) Ha egy szám páros, akkor nullára végződik.
b) Ha egy háromszög egyenlő oldalú, akkor hegyesszögű.
c) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.
c') Egy négyszög, akkor és csak akkor paralelogramma, ha átlói felezik egymást.
d) Ha egy szám osztható 6-tal, akkor 2-vel és 3-mal is osztható.
d') Egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha 2-vel és 3-mal is osztható.
e) Ha egy szorozatnak legalább az egyik tényezője nulla, akkor a szorzat nulla.
e') Egy sorozat akkor és csak akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla.

10) a) Igaz, mert nincs olyan egész szám, amelyre az előtag igaz, az utótag pedig hamis lenne.

b) Ha egy szám osztható 3-mal, akkor osztható 9-cel is. Ez a ki-je-lentés nem igaz minden egész számra.

c) Ha egy szám nem osztható 3-mal, akkor nem osztható 9-cel sem. Ez a kijelentés minden egész számra igaz. (Kontrapozíció tör-vé-nye.)

d1) Egy szám csak akkor osztható 9-cel, ha 3-mal is osztható.

d2) Ahhoz, hogy egy szám 9-cel legyen osztható, szükséges, hogy 3-mal is osztható legyen (vagy: egy szám 9-cel való oszthatóságának szükséges feltétele a 3-mal való oszthatóság).

d3) Egy szám 3-mal való oszthatóságának elegendő feltétele a 9-cel való oszthatóság.

11) a) $(t \rightarrow m) \wedge (\rceil t \rightarrow \rceil m) \wedge (\rceil m \rightarrow (k \wedge f))$,
b) $(s \vee \rceil e \wedge \rceil f) \rightarrow k$.

12) a)

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|r\|$	$\|p \rightarrow$	$\rceil$	$(q \wedge r)\|$
i	i	i	h	h	i
i	i	h	i	i	h
i	h	i	i	i	h
i	h	h	i	i	h
h	i	i	i	h	i
h	i	h	i	i	h
h	h	i	i	i	h
h	h	h	i	i	h
			3	2	1

b)

$\|p\|$	$\|q\|$	$\|(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$(\rceil p$	$\vee q)\|$
i	i	i	i	h	i
i	h	h	i	h	h

h	i	i	i	i	i
h	h	i	i	i	i
		1	3	1	2

c)

|p |	| q|	| (p ∨ q)	↔	(q ∨ p)|
i	i	i	i	i
i	h	i	i	i
h	i	i	i	i
h	h	h	i	h
		1	2	1

13) a)

|p |	| q|	| (p ∧ q)	→	˥	(p →	˥q)|
i	i	i	i	i	h	h
i	h	h	i	h	i	i
h	i	h	i	h	i	h
h	h	h	i	h	i	i
		1	4	3	2	1

Tehát a formula érvényes.

b)

|p |	| q|	| r|	|p →	˥	(q∧ r)|
i	i	i	h	h	i
i	i	h	i	i	h
i	h	i	i	i	h
i	h	h	i	i	h
h	i	i	i	h	i
h	i	h	i	i	h
h	h	i	i	i	h
h	h	h	i	i	h
			3	2	1

A formula nem érvényes, amint azt a 12) a) feladat megoldása is mutatja.

c) $|\rceil p \to q| = |\rceil(\rceil p \wedge \rceil q)| = |p \vee q|$, így
$|(p \vee q) \leftrightarrow (\rceil p \to q)| = |(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee q)| = i$.
Tehát a formula érvényes. (Ellenőrizzük értéktáblázattal is!)

14) a)

|p |	| q|	| ˥	(p→q)|	|(p∧	˥q)|
i	i	h	i	h	h
i	h	i	h	i	i
h	i	h	i	h	h

h	h	h	i	h	i
		2	1	2	1

b)

|p |	| q|	|(p↔q)|	|(p∧q)	∨	(⌉p	∧	⌉q)|
i	i	i	i	i	h	h	h
i	h	h	h	h	h	h	i
h	i	h	h	h	i	h	h
h	h	i	h	i	i	i	i
		1	1	3	1	2	1

15)

a) |⌉(p → q)|=|⌉(⌉(p ∧ ⌉q))|=|p ∧ ⌉q|

b) |p↔q|=|(p → q)∧(q → p)|=|(⌉(p∧⌉q))∧(⌉(q∧⌉p)|=

= |(⌉p ∨ q) ∧ (⌉q ∨ p)|= |(⌉p ∧ ⌉q) ∨ (⌉p ∧ p) ∨ (q ∧ ⌉q) ∨ (q ∧ p)|=

= |(p ∧ q) ∨ (⌉p ∧ ⌉q)|

(Felhasználtuk az ekvivalencia és implikáció definícióját, a De Morgan-képleteket, a konjunkciónak a diszjunkcióra vonatkozó disztributivitását, valamint azt, hogy bármely p kijelentésre |p∧⌉p|=h.)

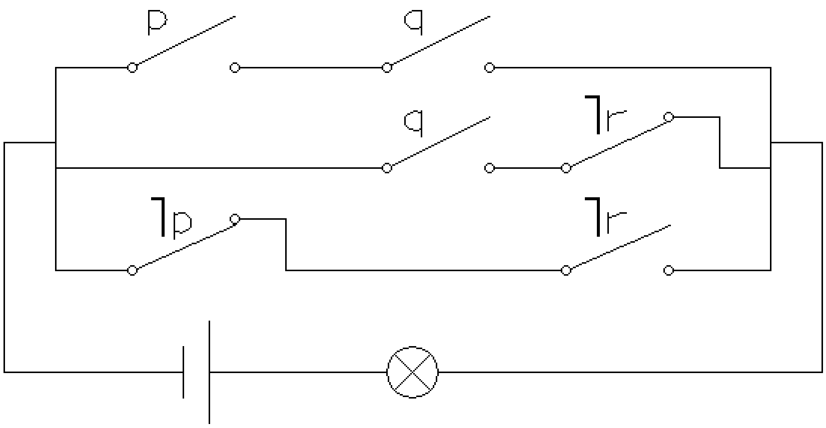
16) a) |p ∨ ⌉(p → q)|= |p ∨ ⌉(⌉p ∨ q)|= |p ∨ (p ∧ ⌉q)|=|p|

b) |q → (p ∧ q)|=|⌉q ∨ (p ∧ q)|= |(⌉q ∨ p) ∧ (⌉q ∨ q)|= |⌉q ∨ p|=|q → p|

c) |⌉p ∨ (p ∧ q)|=|(⌉p ∨ p) ∧ (⌉p ∨ q)|= |⌉p ∨ q|=|p → q|

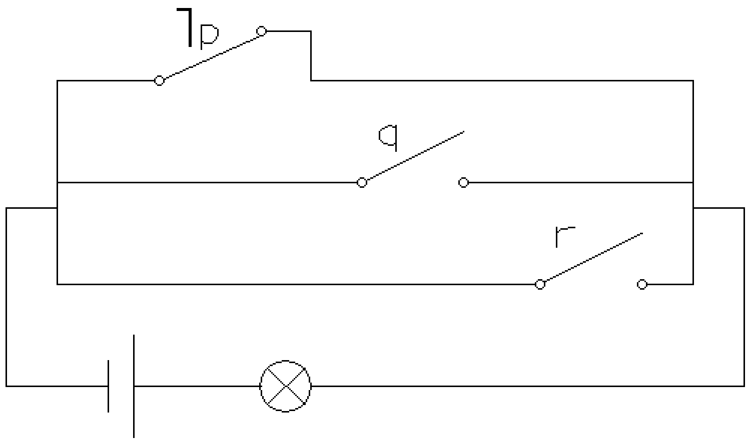
d) |p → (p ∨ q)|=|⌉p ∨ (p ∨ q)|= |(⌉p ∨ p) ∨ q|=i

17) a) (p ∧ q) ∨ (q ∧ ⌉r) ∨ (⌉p ∧ r)



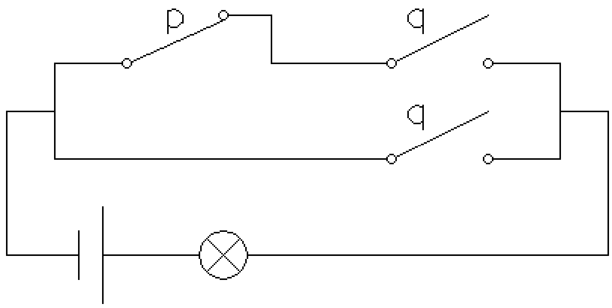
61. kép A 17-es feladat a) részének logikai áramköre

b) $|\rceil(p \to q) \to r| = |\rceil(\rceil p \vee q) \to r| = |(p \wedge \rceil q) \to r| = |\rceil(p \wedge \rceil q) \vee r| = |\rceil p \vee q \vee r|$



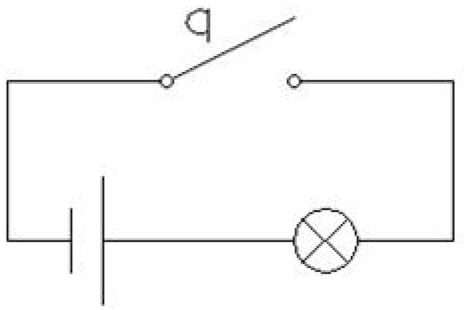
62. kép A 17-es feladat b) részének logikai áramköre

18) $(p \wedge q) \vee (\rceil p \wedge r) \vee (\rceil p \wedge q)$
$|(p \wedge q)| \vee (\rceil p \wedge r) \vee (\rceil p \wedge q)| = |((p \vee \rceil p) \wedge q) \vee (\rceil p \wedge r)| =$
$= |q \vee (\rceil p \wedge r)|$



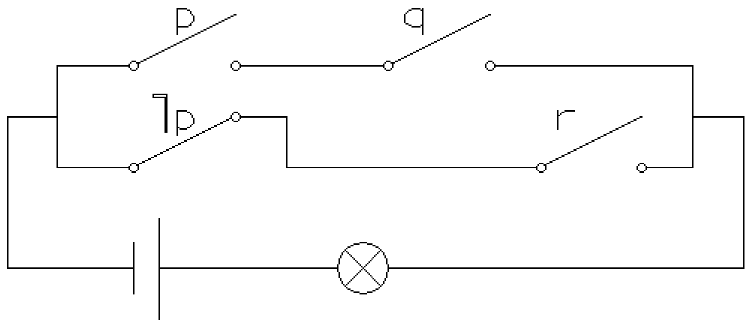
63. kép A 18-as feladat logikai áramköre

19) a) $(p \wedge q) \vee (\rceil p \wedge q)$
$|(p \wedge q) \vee (\rceil p \wedge q)| = |(p \vee \rceil p) \wedge q| = |i \wedge q| = |q|$



64. kép A 19-es feladat a) részének logikai áramköre

b) |(p ∧ q) ∨ ((⌉p ∨ (⌉p ∧ q)) ∧ r)|=|(p∧q) ∨ [(⌉p ∨ (⌉p ∧ q)) ∧ r]|=
= |(p ∧ q) ∨ (⌉p ∧ r)|



65. kép A 19-es feladat b) részének logikai áramköre

20) p:= Éveim száma osztható 6-tal.
q:= Éveim száma páros szám.
a) p → q
b) q
———
c) p

|p|	|q|	|(p → q)|
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

A következtetés nem helyes, mert van olyan interpretáció, amelyre a premisszák mind igazak, a konklúzió pedig hamis.

21) p:= Süt a Nap.

q:= Kirándulni megyek.

a) p → q

b) ⌉p

---

c) ⌉q

p	q	(p→q)	⌉p	⌉q
i	i	i	h	h
i	h	h	h	i
h	i	i	i	h
h	h	i	i	i

A következtetés nem helyes.

22) a)

p	q	r	r →	(p∨q)	r∧q	r→p
i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	i	h	i
i	h	i	i	i	h	i
i	h	h	i	i	h	i
h	i	i	i	i	i	h
h	i	h	i	i	h	i
h	h	i	h	h	h	h
h	h	h	i	h	h	i
			2	1	1	1

A következtetés nem helyes, mert van olyan interpretáció, amelyre a két premissza igaz, a konklúzió hamis.

b)

p	q	⌉p	→	q	⌉p	→	⌉q
i	i	h	i	i	h	i	h
i	h	h	i	h	h	i	i
h	i	i	i	i	i	h	h
h	h	i	h	h	i	i	i

A következtetés helyes.

23) a) ⌉p → q

b) q → r

---

c) ⌉p → r

|p |	| q|	| r|	|⌉p	→	q|	|q→r|	|⌉p	→r|
i	i	i	h	i	i	i	h	i
i	i	h	h	i	i	h	h	i
i	h	i	h	i	h	i	h	i
i	h	h	h	i	h	i	h	i
h	i	i	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	i	i	h	i	i
h	h	i	i	h	h	i	i	h
h	h	h	i	h	h	i	i	h
			1	2	1	1	1	2

A következtetés helyes, mert minden olyan interpretációra, amelyre a premisszák mind igazak, igaz a konklúzió is. (Feltételes szillogizmus)

24)

1. a) p → q
   b) r ∨ ⌉ q
   c) ⌉ r
   ———
   d) ⌉ q

|p |	| q|	| r|	|p→q|	|r∨	⌉q|	|⌉r|	|⌉q|
i	i	i	i	i	h	h	h
i	i	h	i	h	h	i	h
i	h	i	h	i	i	h	i
i	h	h	h	i	i	i	i
h	i	i	i	i	h	h	h
h	i	h	i	h	h	i	h
h	h	i	i	i	i	h	i
h	h	h	i	i	i	i	i
			1	2	1	1	1

Helyes a következtetés!

2.

a) p → (q → r)
b) q ∧ ⌉ r
———
c) ⌉ p

|p |	| q|	| r|	|p→	(q→r)|	|q∧	⌉r|	|⌉p|
i	i	i	i	i	h	h	h
i	i	h	h	h	i	i	h
i	h	i	i	i	h	h	h
i	h	h	i	i	h	i	h
h	i	i	i	i	h	h	i

h	i	h	i	h	i	i	i
h	h	i	i	i	h	h	i
h	h	h	i	i	h	i	i
			2	1	2	1	1

A következtetés helyes.
3. A következtetés szerkezete:
a) b → a
b) s ∨ ⌉ b
c) t → ⌉ s
——
d) a → ⌉t
A következtetés helyességét értéktáblázattal ellenőrízhetjük vagy cáfolhat-juk.

11.3.4 A predikátumlogikai feladatok megoldásai

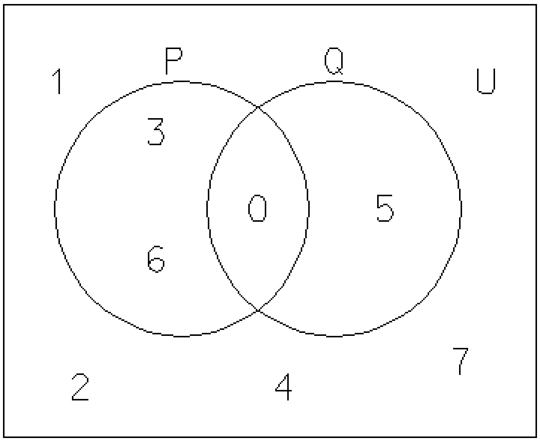
25)
a) U:={állatok}
Rx:= x rovar.
Bx:=x bogár.
∀x(Bx → Rx)
b) U:={egész számok}
Px:= x páros szám.
Nx:=x osztható 4-gyel.
∃x(Px ∧ ⌉Nx)
c) U:={emberek}
Vx:= x vállalkozó.
Mx:= x milliomos.
∃x(Vx ∧ ⌉Mx)
d) U:={tárgyak}
Px:= x fénylő tárgy.
Ax:= x arany tárgy.
⌉∀x(Px → Ax)

26)
a) Nem igaz, hogy a város minden üzlete jövedelmező.
a') Van a városnak olyan üzlete, amelyik nem jövedelmező.
b) Nem igaz, hogy van páros prímszám.
b') Nincs páros prímszám.
c) Az eredeti állítás:
Van prímszám.
Tagadása: Nem, létezik prímszám.
(Nincs prímszám)
A d)-t és e)-t fogalmazzuk meg önállóan!

27)

Az adott kijelentés tagadása nincs a felsorolt lehetőségek között. A helyes válasz a „Minden főiskolai hallgató kedveli a logikát vagy a számítástechnikát” lett volna.

28)



66. kép A 28-as feladat Venn-diagramja

Px igazság halmaza:= P; Qx igazsághalmaza:=Q

a) P \ Q = {0,1,2,4,5,7},

b) P ∩ Q = {1,2,3,4,5,6,7},

c) Q ∩ P = {1,2,3,4,5,6,7},

d) Q \ P = {5},

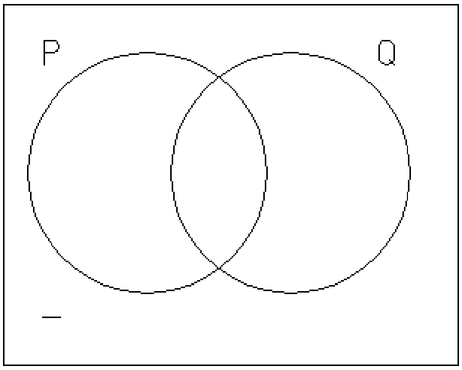
e) P ∩ Q = {1,2,4,7}.

29)

a) P ∩ Q = P \ Q =Ø

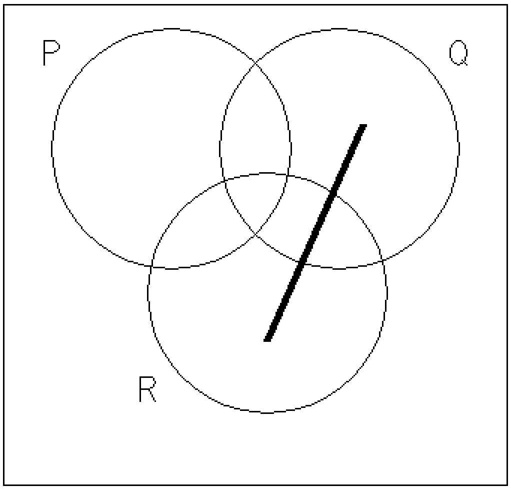
b) P ∩ Q ∩ R ≠ Ø

c)



67. kép A 29-es feladat c) részének Venn-diagramja

d) $P \cap (Q \cup R) \neq \emptyset$



68. kép A 29-es feladat d) részének Venn-diagramja

30) Legyen a tárgyalás alaphalmaza (U) a síkbeli négyszögek halmaza.

Px:= x paralelogramma.

Qx:= x szemben fekvő oldalai párhuzamosak.

Rx:= x rombusz.

Ezekkel a predikátumokkal a következtetés szerkezete:

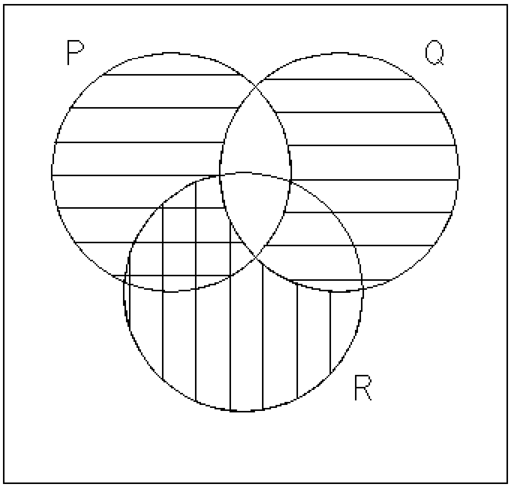
a) $\forall x(Px \leftrightarrow Qx)$

b) $\forall x(Rx \rightarrow Qx)$

---

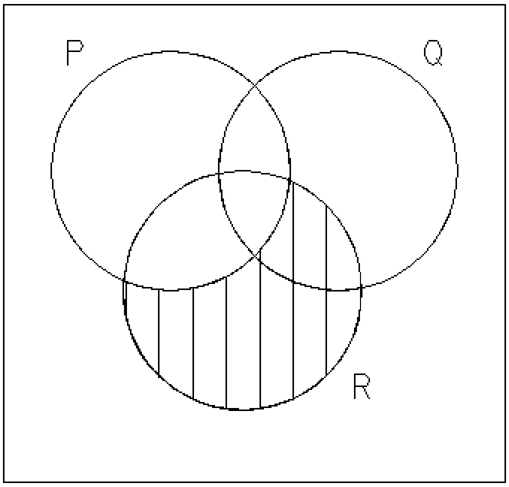
c) $\forall x(Rx \rightarrow Px)$

A premisszák közös Venn-diagramja (69. kép).



69. kép   A 30-as feladatban a premisszák közös Venn-diagramja

a) $(P \setminus Q) \cup (Q \setminus P) = \emptyset$,
b) $R \setminus Q = \emptyset$,
c) $R \setminus P = \emptyset$.
A konklúzió Venn-diagramja (70. kép).



70. kép   A 30-as feladatban a konklúzió Venn-diagramja

(P, Q és R a Px, Qx és az Rx predikátumok igazsághalmazát jelöli.)

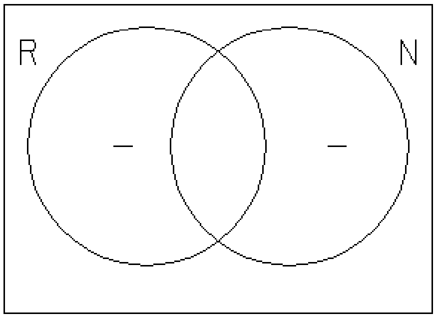
A következtetés helyes, mert a premisszák közös Venn-diagramja részként tartalmazza a konklúzió Venn-diagramját.

31) Legyen U={síkbeli négyszögek}
Rx:=x rombusz.
Nx:= x négyzet.
Predikátumokkal a következtetés a következő alakban írható fel:

a) $\exists x(Rx \wedge Nx)$

---

b) $\exists x(Nx \wedge \rceil Rx)$
Venn-diagrammal ábrázolva (71. kép).

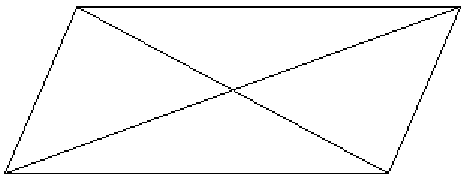


71. kép A 31-es feladat következtetése Venn-diagrammal ábrázolva

a) $R \cap N \neq \emptyset$
b) $N \setminus R \neq \emptyset$
A következtetés nem helyes, mert a premissza Venn-diagramja nem tartalmazza részként a konklúzió Venn-diagramját.

32) A következtetés nem helyes.

33) U:={paralelogrammák}



72. kép A 33-as feladatban szereplő síkidom: a paralelogramma

a:= A (72. képen látható) paralelogramma.
Rx:= x paralelogramma rombusz.
Ax:= x átlói merőlegesek egymásra.

Ezek felhasználásával a következtetés röviden

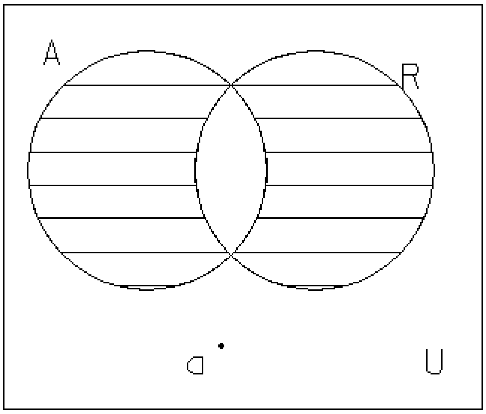
a) ∀x(Ax ↔ Rx)

b) ⌉Aa

---

c) ⌉Ra

alakba írható.



73. kép A 33-as feladatban szereplő síkidom: a paralelogramma

a) (A \ R) ∪ (R \ A) = Ø,

b) a ∈ A ,

c) a ∈ R.

(A az Ax, R az Rx predikátum igazsághalmaza.)

A premisszák közös Venn-diagramjáról leolvasható a konklúzió Venn-diagramja, tehát a következtetés helyes.

34)

U:={élőlények}

Ex:= x ember.

Hx:= x halandó.

a:= Arisztotelész.

Átfogalmazva a következtetés:

a) Minden x-re igaz, hogy ha x ember, akkor x halandó.

b) Arisztotelész ember.

---

c) Arisztotelész halandó.

A következtetés sémája :

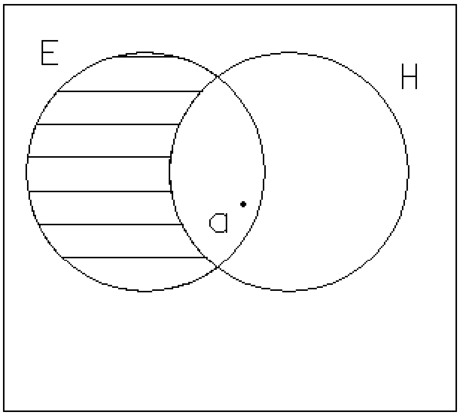
a) ∀x(Ex → Hx)

b) Ea

---

c) Ha

Ábrázoljuk a következtetést Venn-diagramon:



74. kép A 34-es feladat következtetése Venn-diagrammal

a) E \ H = Ø,

b) a ∈ E,

c) a ∈ H.

A következtetés helyes, mert a premisszák közös Venn-diagramjáról leolvasható a konklúzió Venn-diagramja.

35)

U:={emberek}

Tx:=x tanár.

Mx:=x milliomos.

Vx:=x vállalkozó.

A következtetés szerkezete:

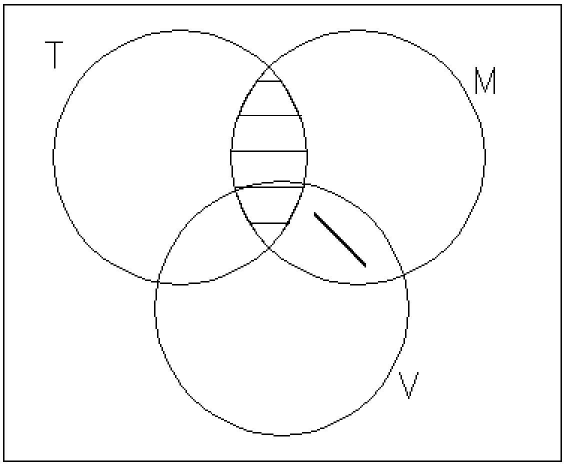
a) ⌉(∃x (Tx ∧ Mx))

b) ∃x(Mx ∧ Vx)

---

c) ∃x(Vx ∧ ⌉Tx)

Ábrázolva Venn-diagramon:



75. kép A 35-ös feladat követeztetése Venn-diagrammal

a) $T \cap M = \emptyset$,
b) $M \cap V \neq \emptyset$,
c) $V \setminus T \neq \emptyset$.
A következtetés helyes.

11.4 ÖSSZEFOGLALÁS

A tananyag elméleti oldalát taglaló leckékben található számos példán és feladaton túl lehetővé vált a gyakorlás a témakörök átfogó ismeretével. Az itt található feladatok megerősíthették a felkészültségét. Az összefoglaló jelleg miatt a lecke címeinek kialakítása nem az eddigi leckék címe alapján, hanem a logika jelentős fejezetinek szemszögéből történt, így kijelentéslogikai és prédikátumlogikai feladatok csoportosítással találta meg a feladatokat és azok megoldásait.

11.5 ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Definiáljuk a konkretizáció műveletét!
2. Mit értünk egy predikátum igazsághalmazán?
3. Értelmezzük Px predikátum kvantifikációját! Hogyan értelmezzük a kvantifikációval kapott kijelentések logikai értékét?
4. Milyen műveleteket végezhetünk predikátumokkal?
5. Szemléltessük Venn-diagrammal a $Px \rightarrow Qx$ és a $Px \leftrightarrow Qx$ igazsághalmazát, ha Px, illetve Qx igazsághalmaza P, illetve Q!
6. Egyváltozós predikátumokból konkretizációval, illetve kvantifikációval képezett kijelentések között értelmezett következtetés mikor helyes?
7. Képezzük a következő „minden x-re Px”, illetve „van olyan x, amelyre Px” típusú kijelentések tagadását!

a) Minden bogár ízeltlábú.
b) Van olyan bogár, amelyik nem rovar.
c) Van kíváncsi állat.
d) Minden négyzet téglalap.

8. Helyes-e a következtetés?

a) Minden rovar ízeltlábú.
b) Nincs olyan bogár, amelyik nem rovar.

---

c) Minden bogár ízeltlábú.

12. ÖSSZEFOGLALÁS

12.1 A KURZUSBAN KITŰZÖTT CÉLOK ÖSSZEFOGLALÁSA

A szimbolikus logika és a matematikai logika kapcsolatának megértése. A matematikai logika alapvető fogalmi rendszerének, jelölésének, összefüggéseinek bizonyításra törő megértése. Cél továbbá a tananyaggal számos tanegység feldolgozásának elősegítése, melyek támaszkodnak a szimbolikus logika elemeire.

12.2 TARTALMI ÖSSZEFOGLALÁS

A jegyzetben bemutattuk a matematikai logika, ezen belül a kijelentéslogika és a predikátumlogika alapvető fogalmait. A kijelentés- és a predikátumkalkulus számára viszonylag könnyen lehet következtetési szabályokat megadni, amelyek megengedik a szokásos tartalmi következtetés szigorú formulázását, de messzemenően megengedtünk olyan bizonyításokat is, melyek a tartalom által vezéreltek, azaz nem formalizáltak. A tárgyalt tananyag matematikai módszereket, jelöléseket alkalmaz, de nem jut el az axiomatikus tárgyalás mélyebb szintjére. A tananyag mélységénél és a bizonyításoknál figyelembe vettük a szak sajátosságait, a szakmai hasznosságot, előtérbe helyeztük a vizualitást, különös tekintettel az elvonatkoztatott logikai bizonyítások esetén. A formális logika elemeinek alapjain túl az olvasó más tárgyak esetén továbbépítkezhet, de ott már nem biztos, hogy a szabatos tárgyalás lesz szükséges.

12.3 A TANANYAGBAN TANULTAK RÉSZLETES ÖSSZEFOGLALÁSA

12.3.1 A logika története, tárgya

A szimbolikus logika kutatási témáit a századfordulón főként matematikai megalapozása és filozófiai problémái motiválták. Később a tudományos módszertan, majd a 20. század második felében az elméleti nyelvészet problémái befolyásolták továbbfejlődését.

A szimbolikus logika csírája, a logikai kalkulus ősképe már Arisztotelész szillogisztikájában (szillogizmus) megtalálható. Egy egyetemes szimbólumnyelv megteremtésének s a logika matematizálásának programját G. W. Leibniz tűzte ki (characteristica universalis), s lépéseket tett realizálására is. Az első matematizált logikai rendszer G. Boole-tól származik (1847, logikai algebra).

G. Frege fogalomírása (1879) magában foglalja a mai szimbolikus logika centrális jelentőségű fejezetét, a klasszikus elsőrendű logikát; innen keltezhető a szimbolikus logika kialakulása. Frege munkássága azonban – részben szokatlan kétdimenziós szimbólumrendszere miatt – kevés figyelmet keltett. A mai szimbólumrendszer nagyrészt G. Peanótól és B. Russelltól származik. Russell és A. N. Whitehead a matematika logicista megalapozására igyekezett felhasználni a szimbolikus logikát (1910–13).

A matematikai alkalmazások szempontjából a 20. sz. első harmadában D. Hilbert és K. Gödel munkássága a legjelentősebb. A szimbolikus logika alkalmazása a modális logika területén C. I. Lewis munkásságával kezdődött. A többértékű logikák kidolgozását Emil Leon Post (1897, 954) és J. Lukasiewicz kezdte meg. A matematikán kívüli alkalmazások úttörője az 1920-as évektől R. Carnap.

Az intenzionális logika 1945 után bontakozott ki; fő eredményei Carnap, A. Church, S. Kripke és R. Montague nevéhez fűződnek. Magyarországon Kalmár László kezdeményezte a szimbolikus logika, ill. a matematikai logika mint matematikai diszciplína művelését, tevékenysége azonban a matematikán kívüli területekre is hatott.

12.3.2 Alapfogalmak

A matematikához kapcsolódó, a tananyag tárgyalása és a későbbi bizonyítások alapjául szolgáló fogalmak, valamint a matematikai logika megértéséhez elengedhetetlenül szükséges fogalmakat ismerhettük meg. Megismertük az arisztotelészi alapelvek mellett az egy és a többértékű logikát. Ezen túl összefoglaltuk a tananyagban alkalmazott összes jelölést, amit útmutatóként érdemes a tanulás és a feladatok megoldása során kezelni.

12.3.3 Logikai műveletek

A matematikai és a logikai művelet fogalmát ismertük meg. A következő logikai műveletek mellett azok bizonyítási igényű tulajdonságairól is esett szó: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció és ekvivalencia megértése, és a logikai műveletek elsajátítása.

12.3.4 Halmazelmélet

A naiv halmazelmélet azon fogalmainak, alapvető eredményeit tárgyaltuk. A halmazelmélet szerepének tömör tisztázása mellett a legfontosabb, halmazokkal kapcsolatos műveleteket definiáltuk. A fejezet alapvető a predikátumlogikai bizonyítások alapjául szolgált.

12.3.5 Kijelentéslogika

A kijelentések logikai értékét (igaz, hamis) figyelembe véve a kijelentések között értelmezett műveletekkel előállított formulák alapján egyszerű következtetésekkel (kijelentéslogikával) foglalkoztunk.

12.3.6 A kijelentéslogika alkalmazásai

Az informatikában az eszközök (hardverelemek) tervezésénél, azok áramköreinek összeállításánál gyakori kérdés, hogy a szükséges feladatot ellátó áramkört milyen elemekből és hogyan kell összeállítani. A matematika logika ebben az esetben egy jól meghatározott gyakorlati célt elégít ki.

12.3.7 A predikátumlogika elemei

Az első fokozatú predikátumkalkulus alapjaihoz szükséges fogalmakat ismertünk meg, mint a predikátum, konkretizáció, kvantifikáció, ezeket a gyakorlati szinten is megvizsgáltuk. Megállapítottuk a predikátumok igazsághalmazát, a kvantifikáció utáni logikai értékét, foglalkoztunk a prédikátumok tagadásával.

12.3.8 Predikátumlogikai következtetések

Az első fokozatú predikátumkalkulus megismerése. A predikátumokkal kapcsolatos műveletek megismerése, mint a negáció, a konjunkció, a diszjunkció, az implikáció és az ekvivalencia. Venn-diagram segítségével a bizonyítási igény kialakítása, a következtetések helyességének megállapítása.

12.3.9 A leckék feladatainak megoldása

A tananyagban szereplő feladatok ellenőrzését végezhette el a leckék alapján. Ha a feladat megoldása nehézséget okozott, akkor azokhoz a megoldási lépések megismerhette, mellel lehetővé vált a későbbi hasonló feladatok önálló megoldása. A feladatok az első néhány elméleti leckéhez nem kapcsolódtak.

12.3.10 Gyakorló feladatok és megoldásaik

A tananyagban található számos példán és feladaton túl lehetővé vált a gyakorlás a témakörök átfogó ismeretével. A logika szemszögéből történt a címek kialakítása is, így kijelentéslogiaki és prédikátumlogikai feladatok csoportosítással találhatók meg a feladatok és azok megoldásai.

13. KIEGÉSZÍTÉSEK

13.1 IRODALOMJEGYZÉK

13.1.1 Hivatkozások

Könyv

ALMÁSI Béla – Dr. FAZEKAS Gábor – KUKI Attila – SZTRIK János: *Az informatika matematikai alapjai. Feladatgyűjtemény Informatika szakos levelező hallgatók számára.* KLTE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 1992.

BALOGH Viktória – CZEGLÉDI István – Dr. VÖRÖS György: *A matematika tanítása III.* Tankönyvkiadó, Bp., 1989.

BÁHEGYESINÉ TOPOR Gizella – BÁNHEGYESI Zoltán: *Matematika. Az informatika matematikai alapjai.* Műszaki, Bp., 2000.

BOLHOVINITOV – KOLTOVOJ – LAGOVSZKIJ: *Furfangos fejtörő feladatok.* Műszaki, Bp., 1989.

FERENCZI Miklós: *Matematikai logika.* Műszaki, Bp., 2002.

Magyar Nagylexikon 1-19. Akadémiai Kiadó (1-4), Magyar Nagylexikon Kiadó (5-19).

PÓLOS László – RUZSA Imre: *A logika elemei.* Tankönyvkiadó, Bp., 1987.

URBÁN János: *Matematikai logika (Példatár). Bolyai-könyvek.* Műszaki, Bp., 1999.

REINHARDT, Fritz – SOEDER, Heinrich : *SH atlasz. Matematika.* Springer-Verlag, Bp., 1993.

SAIN Márton: *Matematikatörténeti ABC. Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához.* Nemzeti Tankönyvkiadó – TypoTEX, Bp., 1993.

Dr. SZENDREI János: *Algebra és számelmélet. Tanárképző Főiskolai Könyvek.* Tankönyvkiadó, Bp., 1989.

Elektronikus dokumentumok / források

DR. TÓTH László: *A matematikai logika alapjai* [elektronikus dokumentum] URL:http://www.ttk.pte.hu/matek/ltoth/A%20matematikai%20logika%20alapjai,%202005.pdf (letöltve: 2010. május 5.)

Középiskolai Matematikai Lapok [online dokumentum] http://www.komal.hu/forum/forum.cgi?a=to&tid=66&st=10&sp=163